1次独立と1次従属

Jacques Garrigue, 2017年10月13日

1次結合　$\vec{v} \in V$ が $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in V$ の1次結合で書けるとは，以下の等式をみたす $c_1, \dots, c_n \in \boldsymbol{R}$ が存在することをいう．

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n$$

1次関係　$\vec{o}$ が $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in V$ の1次結合で書けるとき，その結合を $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ の1次関係ともいう．

$$c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n = \vec{o}$$

1次独立・1次従属　$\vec{o}$ が $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in V$ が自明でない1次関係を持たないとき，すなわち $c_1\vec{u}_1 + \ldots + c_n\vec{u}_n = \vec{o}$ が $c_i = 0$ $(1 \le i \le n)$ と同値であるとき，$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ は1次独立であるという．自明でない1次関係が存在するときは1次従属であるという．

例　$V = \boldsymbol{R}^n$ において，$\vec{e}_i$ を i 番目の成分が1でそれ以外が0の**基本ベクトルとする**．そのときには $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ は1次独立である．

例　$V = \boldsymbol{R}[x]_n$ において $1, x, x^2, \dots, x^n$ という $n+1$ 個のベクトルが1次独立である．

例題　$\boldsymbol{R}^4$ において，次のベクトルが1次独立か1次従属かを調べよ．

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

定理 4.2.1 *$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in V$ が1次従属であることと，ある $\vec{u}_i$ がそれ以外の $\vec{u}_j$ $(j \neq i)$ の1次結合で書けることは同値である．*

定理 4.2.2 *$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \in V$ が1次独立で，$\vec{u}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ が1次従属ならば，$\vec{u}$ が $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ の1次結合として書ける．*

1次結合の行列記法　$A = [a_{ij}]$ が $m \times n$ 行列で，$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ がベクトルの m 組のとき，以下の記法を定義する

$$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)A = (a_{11}\vec{u}_1 + \ldots + a_{m1}\vec{u}_m, \dots, a_{1n}\vec{u}_1 + \ldots + a_{mn}\vec{u}_m)$$

注: $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ と $\left[\begin{array}{c|c|c} \vec{u}_1 & \ldots & \vec{u}_m \end{array}\right]$ を同一視すると計算が一致する．

定理 4.2.3 *V のベクトルの2つの組 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ と $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ について，*

(1) *$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ がそれぞれ $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ の1次結合として書ける*

(2) *$n > m$*

ならば，$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ は *1* 次従属である．

定理 4.2.4 $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m \in V$ が *1* 次独立で，A が $m \times n$ 行列のとき，

$$(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)A = (\vec{o}, \ldots, \vec{o})$$

ならば $A = O_{m,n}$ である．

定理 4.2.5 $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m \in V$ が *1* 次独立で，A と B が $m \times n$ 行列のとき，

$$(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)A = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)B$$

ならば $A = B$ である．

例題

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3, & \vec{v}_2 &= 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 6\vec{u}_3 + \vec{u}_4, \\ \vec{v}_3 &= 2\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3 - \vec{u}_4, & \vec{v}_4 &= \vec{u}_1 - \vec{u}_3 + 3\vec{u}_4 \end{aligned}$$

(1) 上記の 1 次結合を行列をもって表現せよ

(2) $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ が 1 次独立のとき，$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ が 1 次独立か 1 次従属か調べよ．

問題の回答

問 4.1.4　定理 4.1.1 の各条件を確認すればいい．特に (2) と (3) が W_1 と W_2 について同時に保存されるので，$W_1 \cap W_2$ について保存される．

問 4.1.5　背理法で証明する．もしも $W_1 \not\subset W_2$ かつ $W_1 \not\supset W_2$ ならば，$\vec{v}_1 \in W_1 \setminus W_2$ と $\vec{v}_2 \in W_2 \setminus W_1$ が存在する．

$W_1 \cup W_2$ が部分空間なので，$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W_1 \cup W_2$．従って $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W_1$ または $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in W_2$．前者ならば，$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in W_1$ となり，矛盾．後者も，$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_2 \in W_2$ となり，矛盾．