正規直交基と直交行列

Jacques Garrigue, 2018 年 1 月 26 日

定理 6.2.1 (Gram-Schmidt 正規直交化) 内積空間 V の一組の基を $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ とする．

$$\langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \rangle_{\boldsymbol{R}} = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle_{\boldsymbol{R}} \quad (1 \leq r \leq n)$$

となるような正規直交基 $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ が存在する．特に有限次元の内積空間は正規直交基をもつ．

証明　$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 / \|v_1\|$ と定める．当然 $\langle \vec{u}_1 \rangle_{\boldsymbol{R}} = \langle \vec{v}_1 \rangle_{\boldsymbol{R}}$.

　任意の r について，$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ を $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \rangle_{\boldsymbol{R}}$ の正規直交基とする．$\vec{v}_{r+1}$ から $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ それぞれへの正射影を引いたベクトルを $\vec{v}'$ とする．

$$\vec{v}'_{r+1} = \vec{v}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (\vec{v}_{r+1}, \vec{u}_i)$$

正射影の定義から，$\vec{v}'_{r+1}$ が $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ と直交している．さらに $\vec{u}_{r+1} = \vec{v}'_{r+1} / \|\vec{v}'_{r+1}\|$ とすると，$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{r+1}$ は $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{r+1} \rangle_{\boldsymbol{R}}$ の正規直交基になる．

例　以下の $\boldsymbol{R}^3$ の基を正規直交化せよ．

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

定理 6.2.2 $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基とする．$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{u}_i$ と $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} b_i \vec{u}_i$ ならば，

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

直交変換　線形変換 T が

$$(T(\vec{u}), T(\vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (\vec{u}, \vec{v} \in V)$$

をみたすとき，T が直交変換という．

例　$T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ が直交変換である．

定理 6.2.3 $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基とする．V の線形変換 T について

$$T \text{ が直交変換} \Leftrightarrow \{T(\vec{u}_1), \ldots, T(\vec{u}_n)\} \text{ が } V \text{ の正規直交基}$$

直交行列　n 次の実正方行列 P について ${}^t\!PP = E_n$ ならば，P が直交行列という．

　定義から，P が直交行列ならば，$P^{-1} = {}^t\!P$, かつ $\det(P)^2 = 1$.

例　回転行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ が直交行列である．

定理 6.2.4 線形変換 T の表現行列が A だとすると

$$A \text{ が直交行列} \Leftrightarrow T \text{ が直交変換}$$

定理 6.2.5 n 次の実正方行列 A について

$$A \text{ が直交行列} \Leftrightarrow A \text{ の列ベクトルが } \boldsymbol{R}^n \text{ の正規直交基}$$

宿題の回答

まず，V が有限次元の内積空間ならば，任意の部分空間 W について $(W^\perp)^\perp = W$ を証明する．

$$\begin{aligned}
&\vec{u} \in (W^\perp)^\perp \Leftrightarrow \\
&(\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \in W^\perp \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0) \Leftrightarrow \\
&(\forall \vec{v} \in V, (\forall \vec{w} \in W, (\vec{v}, \vec{w}) = 0) \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0) \Leftrightarrow \\
&\vec{u} \in W
\end{aligned}$$

最後のステップは $\vec{u} \in W$ のとき，$\vec{w} = \vec{u}$ とすることで $\Leftarrow$ が証明される．

$\vec{u} \notin W$ ならば，$\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r\}$ を W の正規直交基とする．$\vec{v} = \vec{u} - \sum_{i=1}^{r} (\vec{u}, \vec{u}_i)\vec{u}_i$ とすると，$\vec{v} \in W^\perp$ かつ $\vec{v} \neq 0$ だが $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$ ということで $\Rightarrow$ もなりたつ．

6.1.8　$W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle^\perp$ なので $W^\perp = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

正射影の例　$||\vec{n}|| = 1$ なので, $f(\vec{u}) = \vec{u} - k\vec{n} = \vec{u} - (\vec{n}, \vec{u})\vec{n} = \vec{u} - \vec{n}\,({}^t\vec{n}\,\vec{u}) = (E - \vec{n}\,{}^t\vec{n})\vec{u}$. 具体的な表現行列は

$$\begin{bmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ab & -bc & 1 - c^2 \end{bmatrix}$$

である. また f は表現行列を持つので, 線型写像である.