

内積空間と空間の変換

Jacques Garrigue, 2018 年 1 月 19 日

内積 \mathbf{R} 上のベクトル空間 V のベクトル \vec{u}, \vec{v} に対する実数 (\vec{u}, \vec{v}) が以下の 4 つの公理をみたすとき, (\cdot, \cdot) を V 上の内積という.

$$(1) (\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}', \vec{v}) \text{ (線形性)}$$

$$(2) (c\vec{u}, \vec{v}) = c(\vec{u}, \vec{v}) \text{ (線形性)}$$

$$(3) (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u}) \text{ (可換律)}$$

$$(4) \vec{u} \neq \vec{0} \text{ ならば } (\vec{u}, \vec{u}) > 0 \text{ (正值性)}$$

内積を持つベクトル空間を**内積空間**という.

標準内積 \mathbf{R}^n において,

$$(\vec{u}, \vec{v}) = {}^t\vec{u}\vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

が内積の公理をみたし, **標準内積**という.

例題 $f, g \in \mathbf{R}[x]_n$ に対して, 以下に定義された (f, g) が内積の公理をみたすことを示せ.

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

ベクトルのノルム 内積空間 V において, (\vec{u}, \vec{u}) が非負なので, ノルム $\|\vec{u}\|$ を以下のように定義する.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$$

例 標準内積空間 \mathbf{R}^2 において, $\left\| \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right\|$ を計算せよ.

定理 6.1.1 ノルムについて, 以下の 3 つが成り立つ.

$$(1) \|c\vec{u}\| = |c| \|\vec{u}\|$$

$$(2) |(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \quad (\text{Cauchy-Schwartz の不等式})$$

$$(3) \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \quad (\text{三角不等式})$$

ベクトルの直交 内積空間 V において, 以下の条件がみたされたときに \vec{u} と \vec{v} が直交するといひ, $\vec{u} \perp \vec{v}$ と書く.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

定理 6.1.2 零ベクトルでないベクトル $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ が互いに直交すれば, 1 次独立である.

正規直交基 次の条件をみたす V の基 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ を正規直交基という.

$$(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

例 \mathbf{R}^n の標準基 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ は標準内積に対して正規直交基である.

平面と空間のベクトル空間 平面や空間のベクトルの集合はベクトル空間の構造をもっている. すなわち, 幾何ベクトルの零ベクトル, 加算, スカラー倍がベクトル空間の公理をみたしている.

平面と空間の1次変換 平面と空間において, ベクトル空間としての線形変換を平面と空間の1次変換という. 特に, 点 P を原点からのベクトル \vec{OP} と同一視すると, その1次変換を点や図形に適用することができる.

1次変換の行列 座標系を定めると, 1次変換が表現行列で一意的に決められる.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

例 $f(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{v}$ が線 $x = y$ に対する対称点を返す1次変換である.

定理 6.1.3 (1次変換と直線) f を平面または空間の1次変換とする. このとき f が

- (1) 直線を直線に移す
- (2) 平行な直線を平行な直線に移す
- (3) 同じ直線上の線分の長さの比を変えない

定理 6.1.4 (1次変換と面積) 平面の1次変換 f のある正規直交基に関する表現行列を F とし, $\det(F) \neq 0$ とする. そのとき, f によって任意の三角形 ABC が三角形 $A'B'C'$ に移され, ABC の面積を S , $A'B'C'$ の面積を S' とすると,

$$S' = S |\det(F)|$$

正射影 \vec{o} でないベクトル \vec{n} と任意のベクトル \vec{u} に対し, $\vec{u} - k\vec{n}$ が \vec{n} と直交するような k が唯一存在する. そのとき $k\vec{n}$ を \vec{u} の \vec{n} への正射影という. 具体的には

$$k = \frac{(\vec{n}, \vec{u})}{(\vec{n}, \vec{n})}$$

例 正規直交基をそなえた空間 \mathbf{R}^3 において, $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ かつ $\|\vec{n}\| = 1$ とする. \vec{u} を \vec{n} に対する正射影に移す関数 f が線形変換であることを示し, その表現行列を求めよ.