固有値とトレース・和空間

Jacques Garrigue, 2017 年 12 月 22 日

トレース　$A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする．対角成分の総和をトレースといい，$\mathrm{tr}(A)$ と書く．

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

定理 5.5.1 正方行列 A の固有多項式が $g_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ であるとする．そのとき

$$a_{n-1} = -\mathrm{tr}(A) \qquad a_0 = (-1)^n \det(A)$$

定理 5.5.2 同値な正方行列のトレースは等しい．すなわち，P が正則なら，$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

定理 5.5.3 正方行列 A が対角化可能で，A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする．そのとき，

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \dim(W(\lambda_i; T_A))$$

部分空間の和　ベクトル空間 V の部分空間 W_1 と W_2 に対して，以下に定義する和空間 $W_1 + W_2$ が V の部分空間である．

$$W_1 + W_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \mid u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$$

定理 5.5.4 V を有限次元空間とし，W を V の部分空間とする．もしも $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ と $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ が W と V の基であれば，$\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m, \vec{v}_{i_1}, \ldots, \vec{v}_{i_{n-m}}\}$ が V の基になるような添字 $\{i_1, \ldots, i_{n-m}\}$ が存在する．

証明　$\{i \mid 1 \leq i \leq n, \vec{v}_i \notin W + \langle \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{i-1} \rangle\}$ を使えば，定理が成り立つ．

定理 5.5.5 W_1 と W_2 を V の有限次元部分空間とする．そのとき，以下の次元の関係が成り立つ．

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

証明　$\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$, $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ をそれぞれ W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ の基とする．前の定理より $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{u}_{i_1}, \ldots, \vec{u}_{i_{m-k}}\}$ と $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{v}_{j_1}, \ldots, \vec{v}_{j_{n-k}}\}$ は W_1 と W_2 の基になる．そのベクトルの 1 次関係を $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{o}$ と書く．$\vec{u} = \vec{o}$ ならば，$\vec{v} = \vec{w} = \vec{o}$. $\vec{u} \neq \vec{o}$ ならば $\vec{u} = -(\vec{v} + \vec{w}) \in W_1 \cap W_2$ となり，矛盾する．よって，そのベクトルが 1 次独立なので，$\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k, \vec{u}_{i_1}, \ldots, \vec{u}_{i_{m-k}}, \vec{v}_{j_1}, \ldots, \vec{v}_{j_{n-k}}\}$ が $W_1 + W_2$ の基であり，上の次元の関係がみたされる．

対角化不可能な行列の例　以下のような行列が ($\boldsymbol{C}$ においても) 対角できない．

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

λ はただ 1 つの固有値で，λ の固有空間は $\{\vec{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid c \in \boldsymbol{R}\}$ で，次元は 1.

正方行列 A が対角化不可能な場合でも，固有多項式を $g_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r}$ という形で書ける ($\boldsymbol{C}$ で根 λ_i を求めた場合)．そのとき，各固有空間の次元は固有多項式における次数以下であり，トレースは固有値かける次数の総和である．

定理 5.5.6 固有多項式が $g_A(t) = (t - \lambda_1)^{n_1} \cdots (t - \lambda_r)^{n_r}$ ならば，

$$\dim(W(\lambda_i; T_A)) \leq n_i \qquad \text{かつ} \qquad \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i n_i.$$

証明　$\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m\}$ $(m=\sum_{i=1}^{r}\dim(W(\lambda_i;T_A))$ を各固有空間の基を集めたものとする．定理5.4.1の証明より，そのベクトルが1次独立である．

定理5.5.4より，$\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m,\vec{e}_{j_1},\ldots,\vec{e}_{j_{n-m}}\}$ となる $\boldsymbol{C}^n$ の基がある．$P=[\vec{u}_1\ldots\vec{u}_m\vec{e}_{j_1}\ldots\vec{e}_{j_{n-m}}]$ が正則で，$B=P^{-1}AP=\left[\begin{array}{c|c} D & C \\ \hline O & F\end{array}\right]$ が m 次対角行列 D を使って書ける．

$$g_B(t)=|tE-B|=|tE-D|\cdot|tE-F|=(\prod_{i=1}^{r}(t-\lambda_i)^{\dim(\lambda_i;T_A)})\cdot g_F(t)=\prod_{i=1}^{t}(t-\lambda_i)^{n_i}=g_A(t)$$

より前半の不等式が成り立つ．後半は定理5.5.1の系．

宿題の回答

問題 5.3.4　(1) $A=\begin{bmatrix}7 & -6\\ 3 & -2\end{bmatrix}$

$$g_A(t)=\ |tE-A|=\begin{vmatrix}t-7 & 6\\ -3 & t+2\end{vmatrix}=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$$

$$\lambda=1,4$$

$$\vec{x}\in W(1;T_A)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}6 & -6\\ 3 & -3\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{o}\Leftrightarrow\vec{x}=c\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}\in W(1;T_A)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4 & -4 & -2\\ 6 & -6 & -2\\ 3 & -3 & 1\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{o}\Leftrightarrow\vec{x}=c\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{x}\in W(4;T_A)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}3 & -6\\ 3 & -6\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{o}\Leftrightarrow\vec{x}=c\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\quad A=PBP^{-1}$$

$$\mathrm{tr}(A)=7-2=4+1=\mathrm{tr}(B)$$

(5)

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$g_A(t)=\ |tE-A|=\begin{vmatrix}t-2 & 1 & -2\\ -1 & t & -2\\ 2 & -2 & t+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & t+1\end{vmatrix}+t\begin{vmatrix}t-2 & -2\\ 2 & t+1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}t-2 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}$$

$$=\ t^3-t^2-t+1=(t-1)(t^2-1)$$

$$\lambda=1(2\text{回}),-1$$

$$\vec{x}\in W(1;T_A)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & \\ 0 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -2 & \end{bmatrix}\vec{x}=\vec{o}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{o}\Leftrightarrow\vec{x}=c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$\dim(W(1;T_A))<2$ なので，A は対角化不可能．