クラマーの公式と特別な行列式

Jacques Garrigue, 2017 年 7 月 21 日

クラマーの公式

定理 3.4.3 A が n 次正方行列ならば, 連立 *1* 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の解は次のように書ける.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i = \frac{\det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{b}} \dots \vec{a}_n]}{\det(A)}$$

$[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{b}} \dots \vec{a}_n]$ は A の i 列目を $\vec{b}$ に置き換えた行列.

証明 $\vec{b} = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$ から

$$\begin{aligned} \det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{b}} \dots \vec{a}_n] &= x_1\det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{a}_1} \dots \vec{a}_n] + \dots + x_n\det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{a}_n} \dots \vec{a}_n] \\ &= x_i\det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{a}_i} \dots \vec{a}_n] = x_i \det(A) \end{aligned}$$

特別な形の行列式

ヴァンデルモンドの行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} & \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

多項式

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & -1 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

宿題の解答

3.4.4

$$(1)\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & 0 \\ 0 & 0 & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ f & g & 0 \\ 0 & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} c & d & 0 \\ e & f & g \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = adgi - bh\begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} = adgi - bh(cf - de)$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ a & 4 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & c & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -b\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & c & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = bc\begin{vmatrix} a & 1 & d \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = bc\left\{3\begin{vmatrix} a & d \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$
$$= bc\{3(a-d) - 7(a-1)\} = bc(7 - 4a - 3d)$$

3.4.5 $A\tilde{A} = \det(A)E$ より $\det(A\tilde{A}) = \det(\det(A)E) = \det(A)^n\det(E) = \det(A)^n$.

(1) $\det(A) \neq 0$ ならば, $\det(A\tilde{A}) = \det(A)\det(\tilde{A})$ から, $\det(\tilde{A}) = \det(A)^{n-1}$.

(2) $\det(A) = 0$ ならば, $A = O$ のとき $\tilde{A} = 0$ から $\det(\tilde{A}) = 0 = \det(A)$. $A \neq O$ のとき, $A\tilde{A} = O$ から, $\tilde{A}$ は正則ではない ($A\tilde{A}\tilde{A}^{-1} = A \neq O\tilde{A}^{-1}$), すなわち $\det(\tilde{A}) = 0 = \det(A)$.