置換行列と行列式の性質

Jacques Garrigue, 2017 年 7 月 7 日

定理 1 A が r 次の正方行列, D が s 次の正方行列ならば

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & D\end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline C & D\end{array}\right] = \det(A)\det(D)$$

証明

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline C & D\end{array}\right] = |r_{ij}| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ \hline c_{11} & \dots & c_{1r} & d_{11} & \dots & d_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \dots & c_{sr} & d_{s1} & \dots & d_{ss} \end{array}\right| = \sum_{\sigma\in S_{r+s}} \mathrm{sgn}(\sigma) r_{1\sigma(1)}\dots r_{(r+s)\sigma(r+s)}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_r}\sum_{\tau\in S_s} \mathrm{sgn}(\sigma\cdot\tau) a_{1\sigma(1)}\dots a_{r\sigma(r)} d_{1\tau(1)}\dots d_{s\tau(s)}$$

$$= \left(\sum_{\sigma\in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\dots a_{r\sigma(r)}\right)\left(\sum_{\tau\in S_s} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)}\dots a_{s\tau(s)}\right) = \det(A)\det(D)$$

$i \le r, j > r$ のとき, $r_{ij} = 0$ から, $\sigma \in S_{r+s}$ だとしても, $\{\sigma(1),\dots,\sigma(r)\} = \{1,\dots,n\}$. そうすると, $\{\sigma(r+1),\dots,\sigma(r+1)\} = \{r+1,\dots,r+s\}$ でなければならず, σ を S_r の置換と S_s の置換に分割できる.

定理 2 n 次正方行列 A, B に対して

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

証明 $\det\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline -E & B\end{array}\right]$ を二通り計算する. まず, 前定理から

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline -E & B\end{array}\right] = \det(A)\det(B)$$

また, 下半分に A をかけて上半分に加えた後に上下を交換させると,

$$\det\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline -E & B\end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c} A - AE & AB \\ \hline -E & B\end{array}\right] = (-1)^n \det\left[\begin{array}{c|c} -E & B \\ \hline O & AB\end{array}\right] = (-1)^{2n}\det(AB)$$

A を下半分にかけると, 各行が元の下半分の線形結合なので, それを上半分に加えても行列式の値が変わらない. また, 上下を交換させることは n 行を交換させるので, 行列式の値に $(-1)^n$ をかける.

置換行列　n 個の置換 σ に対する置換行列 $P_\sigma = [p_{ij}]$ は n 次正方行列で, 各行では $p_{i\sigma(i)}$ のみが 1 で, それ以外の成分は 0 である.

例　$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の置換行列は

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

クロネッカーのデルタ関数　$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ と定義する.

等価性の可換律から, $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

δ_{ij} を使うと, $P_\sigma = [p_{ij}]$ を $p_{ij} = \delta_{j\sigma(i)}$ と書ける.

定理 3 列ベクトル $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ を与えたとき, $P_\sigma \vec{a} = \begin{bmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \dots \\ a_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$

また, 行ベクトル $\vec{a} = [a_1 \ \dots \ a_n]$ を与えたとき, $\vec{a}P_\sigma = [a_{\sigma^{-1}(1)} \ \dots \ a_{\sigma^{-1}(n)}]$

証明　$P_\sigma \vec{a}$ の i 行目は $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}a_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{j\sigma(i)}a_j = a_{\sigma(i)}$.

同様に $\vec{a}P_\sigma$ の i 列目は $\sum_{k=1}^{n} a_k p_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{i\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{\sigma^{-1}(i)k} = a_{\sigma^{-1}(i)}$.

定理 4 P_σ と P_τ が置換 σ と τ の置換行列だとすると, $P_\sigma P_\tau = P_{\tau\cdot\sigma}$.

証明　$P_\sigma = [p_{ij}], P_\tau = [q_{ij}], P_\sigma P_\tau = [r_{ij}]$ とする.

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}q_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k\sigma(i)}\delta_{k\tau^{-1}(j)} = \delta_{\sigma(i)\tau^{-1}(j)} = \delta_{\tau(\sigma(i))j} = \delta_{j(\tau\cdot\sigma)(i)}$$

定理 5 σ を置換とすると, $P_{\sigma^{-1}} = {}^tP_\sigma = P_\sigma^{-1}$.

証明　$P_\sigma = [p_{ij}], {}^tP_\sigma = [q_{ij}], {}^tP_\sigma P_\sigma = [r_{ij}]$ とする.

$$q_{ij} = p_{ji} = \delta_{i\sigma(j)} = \delta j\sigma^{-1}(i)$$

また

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i\sigma(k)}\delta_{j\sigma(k)} = \delta_{ij}$$

から ${}^tP_\sigma P_\sigma$ は対角成分のみが 1 で, それ以外が 0 の行列で, すなわち単位行列であることから, $P_\sigma^{-1} = {}^tP_\sigma$.

定理 6 σ が n 個の置換だとして, P_σ をその置換行列とすると, $|P_\sigma| = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

証明 行列式の定義から $|P_\sigma| = \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)p_{1\tau(1)} \dots p_{n\tau(n)} = \sum_{\tau\in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\delta_{\tau(1)\sigma(1)} \dots \delta_{\tau(n)\sigma(n)}$.
しかし, $\tau \neq \sigma$ ならば, $\delta_{\tau(1)\sigma(1)} \dots \delta_{\tau(n)\sigma(n)} = 0$.
また $\delta_{\sigma(1)\sigma(1)} \dots \delta_{\sigma(n)\sigma(n)} = 1$ なので $|P_\sigma| = \mathrm{sgn}(\sigma)$.