

レポート課題 (1月10日提出)

Jacques Garrigue, 2016年12月16日

問1 以下のベクトル空間 W_1, W_2, W_3 の基と次元を求めよ .

$$\begin{aligned} W_1 &= \{\vec{x} \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0\} \\ W_2 &= \left\{ \vec{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \\ W_3 &= W_1 \cap W_2 \end{aligned}$$

問2 以下の行列が対角化可能かどうかを調べ , 可能なとき変換行列と対角行列を示せ .

$$(1) \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

問3 次の線形変換 $T : \mathbf{R}[x]_2 \rightarrow \mathbf{R}[x]_2$ に対して , T の固有値と各固有値の固有空間の基を求めよ .

$$(1) T(f(x)) = f(2x - 1) \quad (2) T(f(x)) = xf'(x)$$

問4 対称行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ において ,

$$a > 0, b > 0, a + b = 1$$

とする .

- (1) 行列 A の固有値と各固有空間の基を求めよ .
- (2) A^n を計算せよ .

問5 有限次元空間の線形変換 T の全ての固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ とする . 自然数 $n \geq 1$ について

$$nT(\vec{x}) = T(n\vec{x}) \quad T^n(\vec{x}) = \begin{cases} T(\vec{x}) & (n = 1 \text{ のとき}) \\ T^{n-1}(T(\vec{x})) & (n > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

という2つの線形変換 nT と T^n を定義する .

nT と T^n の固有値を求め , その根拠を与えよ .