

レポート課題 (7月15日提出)

Jacques Garrigue, 2016年7月8日

問1

次の n 次正方行列の逆行列を求めよ.

$$(1) \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & a_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

問2

(1) A と B が正則行列なら, $\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array} \right]$ の逆行列が $\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & D \\ \hline O & B^{-1} \end{array} \right]$ として書けることを示せ (そのときの D を求めよ).

(2) それを使って, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$ を計算せよ.

問3

正方行列 A が $A^3 = O$ をみたすとき, $E - A$ の逆行列は $E + A + A^2$ であることを示せ.

問4

n 文字の置換全体の集合を S_n とするとき, 次を証明せよ.

- (1) σ が S_n 全体を重複なく動くとき, σ^{-1} も S_n 全体を重複なく動く.
 (2) $\tau \in S_n$ に対して, σ が S_n 全体を重複なく動くとき, $\sigma\tau$ も $\tau\sigma$ も S_n 全体を重複なく動く.

問5

次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \det(kA) \quad (\det(A) \text{ を用いて}) \quad (5) \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix} \quad (x \text{ の多項式として})$$