

正則行列

Jacques Garrigue, 2016 年 6 月 10 日

宿題の回答 (2.3.2) 簡約化すると

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 1 & -1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & a+2b-1 \end{bmatrix} \implies a+2b=1 \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 \end{bmatrix} \implies a \neq 2$$

解の自由度

連立 1 次方程式が解を持つとき, 簡約な行列の形を見ると, 主成分を含まない列に当たる変数について, どんな値を決めても解が存在する. そういう変数の数を解の自由度と呼ぶ. 階数の定義から, 係数行列 A が $m \times n$ 行列とすると, 解の自由度は

$$n - \text{rank}(A)$$

逆に, 解の自由度が 0 ならば, 解は一つしか存在しない.

定理 4 n 変数の連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に解が唯一存在する必要十分条件は

$$\text{rank}(A) = \text{rank}([A \mid \vec{b}]) = n$$

同次形の連立 1 次方程式

定数ベクトル $\vec{b} = \vec{0}$ のとき, 連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

を同次形の連立 1 次方程式という. この場合, 自明な解 $\vec{x} = \vec{0}$ が存在する.

定理 5 A を $m \times n$ 行列とする.

(i) 同次形の連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{0}$ の解が自明な解に限る必要十分条件は

$$\text{rank}(A) = n$$

(ii) $m < n$ ならば, $A\vec{x} = \vec{0}$ が自明でない解を持つ.

解き方 $\vec{b} = \vec{0}$ なので, 拡大係数行列と係数行列が同じ解を持つ. 同次形の連立 1 次方程式を解くときに係数行列を簡約化すれば十分である.

例 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

正則行列

逆行列 A は n 次正方行列とする. n 次正方行列 B が A の逆行列であるとは

$$AB = BA = E_n$$

を満たすときにいう.

A が逆行列をもつとき, A の逆行列がただ 1 つに決まる. B と C が共に A の逆行列ならば

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

正方行列 A が逆行列をもつとき, A は正則行列だという. A が正則行列のとき, A の逆行列を A^{-1} と書く.

定理 6 A, B は n 次正方行列で $AB = E$ ならば, B は A の逆行列である.

定理 7 A が n 次正方行列のとき, 次の (1) ~ (5) は同値である.

- (1) $\text{rank}(A) = n$
- (2) A の簡約化は E_n である
- (3) $A\vec{x} = \vec{b}$ は任意の n 次ベクトル \vec{b} に対し, ただ 1 つの解を持つ
- (4) $A\vec{x} = \vec{o}$ の解は自明な解 $\vec{x} = \vec{o}$ に限る.
- (5) A は正則行列である

証明 (1) ~ (4) の同値性は簡約化から分かる.

(3) \Rightarrow (5) $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ を単位行列の各列ベクトルとする. \vec{e}_i を $A\vec{x} = \vec{e}_i$ の解とする.

$$C = [\vec{c}_1 | \dots | \vec{c}_n] \text{ とおくと, } AC = [A\vec{c}_1 | \dots | A\vec{c}_n] = [\vec{e}_1 | \dots | \vec{e}_n] = E_n.$$

(5) \Rightarrow (4) $A\vec{x} = \vec{o}$ と仮定すると, $\vec{x} = E\vec{x} = (A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{o} = \vec{o}$.

逆行列の計算 上記の (3) \Rightarrow (5) のように, n 個の連立方程式 $A\vec{x} = \vec{e}_i$ ($i = 1, \dots, n$) を立て, A^{-1} をそれぞれの解 \vec{c}_i を集めた行列として得ることができる,

$$A^{-1} = [\vec{c}_1 | \dots | \vec{c}_n].$$

このとき, 各 \vec{c}_i は $[A | \vec{e}_i]$ を $[E | \vec{c}_i]$ に簡約化することで得られる (左が E なので, この拡大係数行列は $\vec{x} = \vec{c}_i$ を意味する). しかし, $\text{rank}(A) = n$ のとき, いくら右に列を増やしても, 最初の n 列が E_n になったときに簡約化が終わり, 残りの列は追加した列の関数でしかない. それを考えると, 解きたい列ベクトルをまとめて係数行列に加えても, 結果が同じである. $[A | \vec{e}_1 | \dots | \vec{e}_n]$ の簡約化が $[E | \vec{c}_1 | \dots | \vec{c}_n]$ になる. まとめると, 簡約化で

$$[A | E] \rightarrow [E | A^{-1}]$$

また $[A | E]$ を簡約化しても左の部分が E にならなければ, $\text{rank}(A) \neq n$ なので, A は正則ではない.

例題 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$