

空間図形 (3)

Jacques Garrigue, 2016 年 5 月 13 日

ベクトルの内積

内積 2つのベクトル $\vec{a} = \vec{AB}$ と $\vec{b} = \vec{AC}$ に対して, $\theta = \angle BAC$ を \vec{a} と \vec{b} のなす角という. \vec{a}, \vec{b} に対して一意的に定まる実数

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

を \vec{a}, \vec{b} の内積またはスカラー積という.

定理 4 (i) $(\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|^2 \geq 0$

(ii) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$

(iii) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}), (\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$

(iv) $(k\vec{a}, \vec{b}) = k(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, k\vec{b})$

\vec{a} と \vec{b} のなす角が $\theta = \pi/2$ のとき, \vec{a} と \vec{b} は直交するといひ, $\vec{a} \perp \vec{b}$ と表す.

定理 5 (i) $\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$

(ii) $|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$

シュワルツの不等式

直交座標系と内積 互いに直交する大きさ 1 のベクトルから作られる基底を正規直交基底といひ, 正規直交基底を基本ベクトルとする座標系を直交座標系という.

定理 6 平面の場合

(i) $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ が正規直交基底 $\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1 & (i = 1, 2) \\ (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 \end{cases}$

(ii) 正規直交基底 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ において, $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \alpha, \beta$ は \vec{a}, \vec{b} と \vec{e}_1 のなす角,

$\theta = \beta - \alpha$ は \vec{a} と \vec{b} のなす角ならば,

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\beta - \alpha) = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \left(\frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \frac{b_1}{\|\vec{b}\|} + \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \frac{b_2}{\|\vec{b}\|} \right) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = {}^t \vec{a} \vec{b} \end{aligned}$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \Leftrightarrow {}^t \vec{a} \vec{b} = 0$$

(iii) 直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ に関して, 点 $P(x_1, y_1)$ から点 $Q(x_2, y_2)$ までの距離は

$$\overline{PQ} = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

定理 4 の証明 (平面の場合)

(iii) 以外は内積の定義から自明. (iii) は $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ から証明できる.

定理 7 空間の場合

$$(i) \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ が正規直交基底} \Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1 & (i = 1, 2, 3) \\ (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$(ii) \text{ 正規直交基底 } \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ において, } \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角ならば,}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= \sum_{i=1}^3 a_i b_i = {}^t \vec{a} \vec{b} & \|\vec{a}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \\ \cos \theta &= \frac{\sum_{i=1}^3 a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^3 b_i^2}} & \vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 a_i b_i = 0 \Leftrightarrow {}^t \vec{a} \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

(iii) 直交座標系 $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ に関して, 点 $P(x_1, y_1, z_1)$ から点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ までの距離は

$$\overline{PQ} = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

法線ベクトル 平面上の直線または空間内の平面と直交するベクトルを, その直線または平面の法線ベクトルという.

定理 8 (i) 直線: $ax + by = c$ に対して, $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ は法線ベクトルである.

(ii) 平面: $ax + by + cz = d$ に対して, $\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ は法線ベクトルである.

証明 直線 (l) 上の 2 点 $P(x_1, y_1)$ と $Q(x_2, y_2)$. 直線の方程式から

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = c \\ ax_2 + by_2 = c \end{cases} \Rightarrow a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0.$$

内積 $(\vec{n}, \vec{PQ}) = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$ になるので, \vec{n} と \vec{PQ} が直交している.

平面 (π) 上の任意の 2 点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と $Q(x_2, y_2, z_2)$ について同じ計算ができ, $(\vec{n}, \vec{PQ}) = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0$ から \vec{n} と \vec{PQ} が直交していることが分かる.

例 平行四辺形の面積

(i) 平行四辺形 ABCD の面積が $S = \sqrt{\|\vec{AB}\|^2 \|\vec{AD}\|^2 - (\vec{AB}, \vec{AD})^2}$ であることを示せ.

(ii) 直交座標系に関して, $\vec{AB} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{AD} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ならば $S = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ を示せ.

練習問題

(i) $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が正規直交基底であることを示せ.

(ii) 3 点 $A(1, 3, -1), B(2, 6, 1), C(-1, 4, 2)$ を頂点とする三角形について, $\angle BAC$ の値および $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

(iii) 二つの平面 $\pi_1: 2x - y + z = 1, \pi_2: x + y + z = -1$ に直交し, かつ, 点 $(1, 0, -2)$ を通る平面 π の方程式を求めよ.