

空間図形

Jacques Garrigue, 2016 年 4 月 29 日

幾何ベクトル 空間の二つの線分 \vec{AB} と \vec{CD} の向きと長さが同じときに, その二つが幾何ベクトルとして等価であるといい, $\vec{AB} = \vec{CD}$ と書く. 線分を書かずに, 幾何ベクトルを名前で指すこともできる $\vec{a} = \vec{AB}$. 長さ 0 のベクトル $\vec{o} = \vec{AA}$ は向きを持たず, 零ベクトルという.

幾何ベクトルの和と差 二つの幾何ベクトルが \vec{AB} , \vec{BC} と表せたとき, その和が \vec{AC} になる. 同様に $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$. 特に $-\vec{AB} = \vec{AA} - \vec{AB} = \vec{BA}$, 同じ長さで向きが逆のベクトル.

幾何ベクトルの実数倍 ベクトル \vec{a} と同じ向きで長さが k 倍 (k は正の実数) の幾何ベクトルを $k\vec{a}$ と書く. 特に $0\vec{a} = \vec{o}$. また, 負の実数に関して, $(-k)\vec{AB} = k(-\vec{AB}) = k\vec{BA}$.

幾何ベクトルの性質 幾何ベクトルは数ベクトルと同じ性質を持っている. 特に和の性質・スカラー倍の性質・分配率がそのまま利用できる.

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} & \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} & \vec{a} + \vec{o} &= \vec{a} \\ k(\vec{a} + \vec{b}) &= k\vec{a} + k\vec{b} & (k+l)\vec{a} &= k\vec{a} + l\vec{a} & (kl)\vec{a} &= k(l\vec{a}) & 1\vec{a} &= \vec{a} & 0\vec{a} &= \vec{o} \end{aligned}$$

ベクトルの並行 零でない二つのベクトル \vec{a}, \vec{b} が並行であることは, $\vec{a} = k\vec{b}$ となるような k が存在することと等価である.

位置ベクトル 基点 O を定めると, 任意の点 A をベクトル \vec{OA} として表すことができる. 逆に「点 \vec{a} 」という表現は位置ベクトル \vec{a} が定める点を指す.

例 (内分点・外分点) 2 点 \vec{a}, \vec{b} に対して, \vec{a} から \vec{b} に至る線分を $m:n$ の比に

(i) 内分する点の位置ベクトルは $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$,

(ii) 外分する点の位置ベクトルは $\frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$ (ただし $m \neq n$).

問 3 角形 ABC の辺 AB, AC を $m:n$ に内分する点をそれぞれ M, N とするとき, MN と BC が並行であることを示せ.

線形結合 n 個の幾何ベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ が与えられた時, あるベクトル \vec{b} が $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$ として表現できたとき, \vec{b} は $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ の線形結合だと言う.

基底 n 個の幾何ベクトル $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ について, 任意の幾何ベクトル \vec{a} が $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ の線形結合で, かつ全ての i について \vec{e}_i が \vec{e}_i 以外の $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ の線形結合でなければ, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ は基底である. $n=2$ のときは平面の基底, $n=3$ のときは空間の基底という.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n$$

から得られた (a_1, \dots, a_n) を \vec{a} の成分という. \vec{a} とその各成分から作った列ベクトルを同一視できる.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

定理 1 (成分の一意性) もしも $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n$ かつ $\vec{a} = a'_1\vec{e}_1 + \dots + a'_n\vec{e}_n$ ならば, $a_i = a'_i$ ($i = 1, \dots, n$).

証明 簡単のために, $a_1 \neq a'_1$ と仮定する. 和と実数倍の性質から, $(a_1 - a'_1)\vec{e}_1 = (a_2 - a'_2)\vec{e}_2 + \dots + (a_n - a'_n)\vec{e}_n$ となるので,

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{a_1 - a'_1} [(a_2 - a'_2)\vec{e}_2 + \dots + (a_n - a'_n)\vec{e}_n]$$

これが基底の定義と矛盾するので, 全ての成分が同じでなければならない.

数ベクトルの性質 上記の幾何ベクトルの性質を使えば, 幾何ベクトルの演算が数ベクトル上でもできることが分かる.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, k \in \mathbf{R} \text{ ならば } \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}, k\vec{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$