ベクトル空間の応用

Jacques Garrigue, 2016 年 11 月 18 日

1　エラー訂正符号

符号理論で研究されるエラー訂正符号は，通信エラーをの検出と訂正することを目的としている．具体的には，冗長な情報を加えることによって，情報の一部が欠如また誤りを含んだ場合でも，元のデータが再現できるようにする．

最も単純なものは符号ビット (パリティ) の追加によって，誤りを検出できるようにすることだが，追加情報をさらに増やすと訂正も可能になる．

線形符合　線形符号では，符号化やエラーの発見が線形写像で定義されている．例えば，4 ビット毎にパリティを追加する符合は以下の $\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$ 上の 2 つお行列で定義されている．

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

G は符号化写像を定義している．例えば，

$$G\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1+1+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

H はパリティ検査行列で、符合に含まれるベクトルを $\vec{o}$ に送る．

$$H\ {}^t\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1+0+1+1 \end{bmatrix} = \vec{o}$$

方程式 $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 0$ を確認している．

C を符号化された語の集合とすると

$$C = \mathrm{Im}(G) = \mathrm{Ker}(H)$$

ハミング符合　パリティ検出符合では，エラーを検出することしかできないが，ハミング符合では，エラーが高々1 ビットならば，それを訂正することもできる．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \left[\frac{A}{E}\right]_{7,4} \qquad H = \left[\ E \mid A\ \right]_{3,7}$$

特に $HG = AE + EA = A + A = O_{3,4}$ から $\mathrm{Im}(G) \subset \mathrm{Ker}(H)$ が分かる．さらに，$\dim(\mathrm{Ker}(H)) = 7 - \mathrm{rank}(H) = 4$ と $\dim(\mathrm{Im}(G)) = \mathrm{rank}(G) = 4$ より，$\mathrm{Ker}(H) = \mathrm{Im}(G)$ となり，線形符合を定義する．

送った語を $\vec{w}$, 届いた語を $\vec{r}$ とすると，$\vec{r} = \vec{w} + \vec{e}$ とする．$\vec{s} = H\vec{r} = H\vec{w} + H\vec{e} = H\vec{e}$ をシンドロームという. $\vec{e}$ の 0 でないビットが高々1 つだとすると，

$$H\vec{e} = 0 \Leftrightarrow \vec{e} = \vec{o}$$

$\vec{e} \neq \vec{o}$ のとき，$\vec{H}$ の列が全て異なっているので (1 から 7 までの 2 進表現になっている)，$\vec{s}$ から間違っているビットが分かる．

例 $\vec{x} = {}^t\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると

$$\vec{w} = G\vec{x} = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

もしも $\vec{r} = {}^t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ として受信されると，

$$\vec{s} = H\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり，A の 2 列目と一致する．これでで $\vec{e} = \vec{e}_5$ が分かり，$\vec{r} + \vec{e}_5 = \vec{w}$ という形で入力を修復できる．

2 次元解析

物理の方程式では各分量には単位が付く．ある方程式が正しく構成されていることを確認するために，含まれる各変数の単位を推論しなければならない．

$$\begin{aligned} &g = 9.8ms^{-2} \\ &t = 3s \\ &v = gt + v_0 \end{aligned}$$

この中で各分量の単位が次元方程式で結ばれる．

$$\begin{aligned} &[g] \cdot m^{-1} \cdot s^2 &&= 1 \\ &[t] \cdot s^{-1} &&= 1 \\ &[v] \cdot [v_0]^{-1} &&= 1 \\ &[v] \cdot [g]^{-1} \cdot [t]^{-1} &&= 1 \end{aligned}$$

対数をかけると 1 次連立方程式になり，行列で表現できる．

$$\begin{bmatrix} [g] & [t] & [v] & [v_0] & m & s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} [g] & [t] & [v] & [v_0] & m & s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

これで結果が分かる．

$$[g] = ms^{-2} \quad [t] = s \quad [v] = ms^{-1} \quad [v_0] = ms^{-1}$$