線形写像の空間と表現行列

Jacques Garrigue, 2016 年 11 月 11 日

線形写像の空間　$\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 U と V が与えられたとき，U と V の間の線形写像を全て集めた集合を $\mathrm{Hom}(U,V)$ と書く．$\mathrm{Hom}(U,V)$ もまた $\boldsymbol{R}$ 上の線形空間である．特に

(1) 常に $\vec{o}$ を返す写像 O は $\mathrm{Hom}(U,V)$ に含まれる．

(2) $T,S \in \mathrm{Hom}(U,V)$ とする，$T+S$ を $(T+S)(\vec{x}) = T(\vec{x}) + S(\vec{x})$ と定義すると，$T+S \in \mathrm{Hom}(U,V)$.

(3) $T \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $c \in \boldsymbol{R}$ とする，cT を $(cT)(\vec{x}) = c \cdot T(\vec{x})$ と定義すると $cT \in \mathrm{Hom}(U,V)$.

(4) 線形空間 U の恒等関数 Id は $\mathrm{Hom}(U,U)$ に含まれる．

(5) $T \in \mathrm{Hom}(U,V)$, $S \in \mathrm{Hom}(V,W)$ とすると，その合成 $S \circ T$ が $\mathrm{Hom}(U,W)$ に含まれる．

線形変換　$\mathrm{Hom}(U,U)$ の線形写像を U の線形変換という．

例　任意の $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 U において，$T(\vec{x}) = c\vec{x}$ というスカラー倍変換は線形変換である．

基の変換行列　有限次元ベクトル空間 U の 2 つの基 $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ と $\{\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n\}$ が与えられたとき，片方がもう一方の 1 次結合として書ける．

$$(\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n) = (\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)P$$

その正則行列 P は $\{\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n\}$ から $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ への基の変換行列という．P は恒等写像 Id の U の 2 つの基基 $\{\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n\}$ と $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ に関する表現行列でもある．

$$(Id(\vec{u}'_1),\dots,Id(\vec{u}'_n)) = (\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n) = (\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)P$$

合成の表現行列

(1) $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$, $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\}$, $\{\vec{w}_1,\dots,w_\ell\}$ を U,V,W の基,

(2) $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ と $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\}$ に関する T の表現行列を A,

(3) $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\}$ と $\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_\ell\}$ に関する S の表現行列を B

とすると，$\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ と $\{\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k\}$ に関する $S \circ T$ の表現行列は BA である．すなわち,

$$(S(T(\vec{u}_1)),\dots,S(T(\vec{u}_n))) = (S(\vec{v}_1),\dots,S(\vec{v}_m))A = (\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k)BA$$

定理 5.2.1 $T \in \mathrm{Hom}(U,V)$ とする．

(1) T の $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ と $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\}$ に関する表現行列が A,

(2) T の $\{\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n\}$ と $\{\vec{v}'_1,\dots,\vec{v}'_m\}$ に関する表現行列が B,

(3) $\{\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n\}$ から $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ への基の変換行列が P,

(4) $\{\vec{v}'_1,\dots,\vec{v}'_m\}$ から $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m\}$ への基の変換行列が Q

ならば,

$$B = Q^{-1}AP$$

証明 T の線形性と $(\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n) = (\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)P$ より

$$(T(\vec{u}'_1),\dots,T(\vec{u}'_n)) = (T(\vec{u}_1),\dots,T(\vec{u}_n))P = (\vec{v}_1,\dots\vec{v}_m)AP$$

一方

$$(T(\vec{u}'_1),\dots,T(\vec{u}'_n)) = (\vec{v}'_1,\dots,\vec{v}'_m)B = (\vec{v}_1,\dots\vec{v}_m)QB$$

$(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_m)$ が 1 次独立なので，$AP = QB$，両辺に Q^-1 をかけると $B = Q^-1AP$.

定理 5.2.2 $T \in \mathrm{Hom}(U,U)$ について

(1) T の $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ に関する表現行列が A,

(2) T の $\{\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n\}$ に関する表現行列が B,

(3) $\{\vec{u}'_1,\dots,\vec{u}'_n\}$ から $\{\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n\}$ への基の変換行列が P

ならば,

$$B = P^{-1}AP$$

例題　$\boldsymbol{R}^2$ の線形変換 $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\vec{x}$ の基 $\left\{\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ に関する表現行列を求めよ.

例題　$\boldsymbol{R}[x]_2$ の線形変換 $T(f) = f'(x)x + f(0)x^2 + f(1)$ について

(1) 基 $\{1, x, x^2\}$ に関する T の表現行列 A を求めよ.

(2) 基 $\{1+x, x+x^2, x^2\}$ に関する T の表現行列 B を求めよ.