1 次独立の最大個数

Jacques Garrigue, 2016 年 10 月 21 日

1 次独立の最大個数　ベクトルの集合 X の中に r 個の 1 次独立なベクトルが存在し，$r+1$ 個の 1 次独立なベクトルが存在しないとき，r を 1 次独立の最大個数という．

定理 4.3.1 $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ が $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ の *1* 次結合として書けるとき，$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ の *1* 次独立の最大個数が $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ の *1* 次独立の最大個数以下である．

定理 4.3.2 「$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ の *1* 次独立な最大個数は r である」と，「$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ の中に r 個の *1* 次独立なベクトルがあり，残りの $m-r$ のベクトルがこの r 個の *1* 次結合として書ける」は同値である．

例題　次のベクトルの 1 次独立な最大個数とその具体なベクトルを与え，残りのベクトルをその 1 次結合として表現せよ．

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ヒント： $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_5]$ を $B = [\vec{b}_1 \dots b_5]$ に簡約すると，$A\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow B\vec{x} = \vec{o}$ がなりたち，$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ と $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ が同じ 1 次関係を持つので，1 次関係を持たない最大個数を見付け，それを元に他のベクトルの 1 次結合を見付ければいい．

　簡約された行列において，主要成分を含む列が 1 次関係を持たない．逆に，主要成分を含まない列は主要成分を含む列の 1 次結合として書ける．上の定理を使うと，1 次独立な最大個数は主要成分を含む列の数，すなわち $\mathrm{rank}(A)$ であることが分かる．

定理 4.3.3 A の列ベクトルの *1* 次独立な最大個数と A の行ベクトルの *1* 次独立な最大個数はともに $\mathrm{rank}(A)$ である．

定理 4.3.4 A を n 次正方行列とする．以下の *3* つの条件が同値である．

(1) A は正則行列

(2) A の列ベクトルが *1* 次独立である

(3) A の行ベクトルは *1* 次独立である

定理 4.3.5 行列の簡約化は唯一通り決まる．

証明　B を A の簡約化とする．簡約化手続の性質として，$A\vec{x}=\vec{o} \Leftrightarrow B\vec{x}=\vec{o}$ かつ B は簡約である．B の最初の k 列が一意に決まることを k に関する帰納法で証明する．

- $k=1$ の場合．$\vec{a}_1=\vec{o}$ のとき，$\vec{a}_1=0\vec{a}_2+\ldots+0\vec{a}_3$ から $\vec{b}_1=\vec{o}$．そうでないとき，簡約の定義より $\vec{b}_1=\vec{e}_1$ (最初の成分だけが 1)．

- $k+1$ の場合．B の最初の k 列が一意に決まると仮定する．$I \subset \{1,\ldots,k\}$ が列 k までの主成分を含む列の位置を指す．$\#(I)$ は I の元の数を表す．
  $\vec{a}_{k+1}$ が $\{\vec{a}_i \mid i \in I\}$ の 1 次結合 $\sum_{i\in I} c_i\vec{a}_i$ として書けるとき，定理 4.2.5 より，その 1 次結合の係数は唯一である．そのとき $\vec{b}_k=\sum_{i\in I} c_i\vec{b}_i$ はその係数のベクトルである ($\{\vec{b}_i \mid i \in I\}$ は $\vec{e}_1$ から $\vec{e}_{\#(I)}$ までの基本ベクトルなので，$i \in I$ の小さい順に c_i を並べ，残りを 0 で埋める)．
  1 次結合として書けないとき，$\vec{b}_k=\vec{e}_{\#(I)+1}$，すなわちまだ主成分を含まない最初の行のみが 1 でなければならない．

$k=n$ のとき，定理が得られる．

定理 4.3.6 $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m$ が *1* 次独立で，

$$(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_m)A$$

とする．

(1) $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ は A の列ベクトル $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ と同じ *1* 次関係をもつ．

(2) $m=n$ のとき，「$\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ が *1* 次独立」と「A が正則行列」は同値である．

例題　次の $\boldsymbol{R}[x]_3$ のベクトルの 1 次独立な最大個数とその具体なベクトルを与え，残りのベクトルをその 1 次結合として表現せよ．

$$\begin{array}{ll} f_1(x)=1+x+3x^2 & f_2(x)=1+2x-x^3 \\ f_3(x)=1+3x-3x^2-2x^3 & f_4(x)=-2-4x+x^2-x^3 \\ f_5(x)=-1-4x+7x^2 & \end{array}$$