

正規直交基と直交行列

Jacques Garrigue, 2017年1月20日

定理 6.2.1 (Gram-Schmidt 正規直交化) 内積空間 V の一組の基を $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ とする.

$$\langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n \rangle_{\mathbf{R}} = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \rangle_{\mathbf{R}} \quad (1 \leq r \leq n)$$

となるような正規直交基 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ が存在する. 特に有限次元の内積空間は正規直交基をもつ.

証明 $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 / \|\vec{v}_1\|$ と定める. 当然 $\langle \vec{u}_1 \rangle_{\mathbf{R}} = \langle \vec{v}_1 \rangle_{\mathbf{R}}$.

任意の r について, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ を $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \rangle_{\mathbf{R}}$ の正規直交基とする. \vec{v}_{r+1} から $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ それぞれへの正射影を引いたベクトルを \vec{v}' とする.

$$\vec{v}'_{r+1} = \vec{v}_{r+1} - \sum_{i=1}^r (\vec{v}_{r+1}, \vec{u}_i) \vec{u}_i$$

正射影の定義から, \vec{v}'_{r+1} が $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ と直交している. さらに $\vec{u}_{r+1} = \vec{v}'_{r+1} / \|\vec{v}'_{r+1}\|$ とすると, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{r+1}$ は $\langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{r+1} \rangle_{\mathbf{R}}$ の正規直交基になる.

例 以下の \mathbf{R}^3 の基を正規直交化せよ.

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right], [2, -1, 1] \right\}$$

定理 6.2.2 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基とする. $\vec{u} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i$ と $\vec{v} = \sum_{i=1}^n b_i \vec{u}_i$ ならば,

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

直交変換 線形変換 T が

$$(T(\vec{u}), T(\vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (\vec{u}, \vec{v} \in V)$$

をみたすとき, T が直交変換という.

例 $T(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ が直交変換である.

定理 6.2.3 $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基とする. V の線形変換 T について

$$T \text{ が直交変換} \Leftrightarrow \{T(\vec{u}_1), \dots, T(\vec{u}_n)\} \text{ が } V \text{ の正規直交基}$$

直交行列 n 次の実正方行列 P について ${}^t P P = E_n$ ならば, P が直交行列という.

定義から, P が直交行列ならば, $P^{-1} = {}^t P$, かつ $\det(P)^2 = 1$.

例 回転行列 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ が直交行列である.

定理 6.2.4 線形変換 T の表現行列が A だとすると

$$A \text{ が直交行列} \Leftrightarrow T \text{ が直交変換}$$

定理 6.2.5 n 次の実正方行列 A について

$$A \text{ が直交行列} \Leftrightarrow A \text{ の列ベクトルが } \mathbf{R}^n \text{ の正規直交基}$$