内積空間と空間の変換

Jacques Garrigue, 2017 年 1 月 10 日

内積　$\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対する実数 $(\vec{u}, \vec{v})$ が以下の 4 つの公理をみたすとき，$(\cdot, \cdot)$ を V 上の内積という．

(1) $(\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{u}', \vec{v})$ (線形性)

(2) $(c\vec{u}, \vec{v}) = c(\vec{u}, \vec{v})$ (線形性)

(3) $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$ (可換律)

(4) $\vec{u} \neq \vec{o}$ ならば $(\vec{u}, \vec{u}) > 0$ (正値性)

内積を持つベクトル空間を**内積空間**という．

標準内積　$\boldsymbol{R}^n$ において，

$$(\vec{u}, \vec{v}) = {}^t\vec{u}\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

が内積の公理をみたし，標準内積という．

例題　$f, g \in \boldsymbol{R}[x]_n$ に対して，以下に定義された (f, g) が内積の公理をみたすことを示せ．

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

ベクトルのノルム　内積空間 V において，$(\vec{u}, \vec{u})$ が非負なので，ノルム $||\vec{u}||$ を以下のように定義する．

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$$

例　標準内積空間 $\boldsymbol{R}^2$ において，$\left|\left| \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right|\right|$ を計算せよ．

定理 6.1.1 *ノルムについて，以下の 3 つが成り立つ．*

(1) $||c\vec{u}|| = |c| \; ||\vec{u}||$

(2) $|(\vec{u}, \vec{v})| \leq ||\vec{u}|| \; ||\vec{v}||$　　*(Cauchy-Schwartz の不等式)*

(3) $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$　　*(三角不等式)*

ベクトルの直交　内積空間 V において，以下の条件がみたされたときに $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が直交するといい，$\vec{u} \perp \vec{v}$ と書く．

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

定理 6.1.2 *零ベクトルでないベクトル $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_r$ が互いに直交すれば，1 次独立である．*

正規直交基　次の条件をみたす V の基 $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ を正規直交基という．

$$(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

例　$\boldsymbol{R}^n$ の標準機 $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ は標準内積に対して正規直交基である．

平面と空間のベクトル空間　平面や空間のベクトルの集合はベクトル空間の構造をもっている．すなわち，幾何ベクトルの零ベクトル，加算，スカラー倍がベクトル空間の公理をみたしている．

平面と空間の 1 次変換　平面と空間において，ベクトル空間としての線形変換を平面と空間の 1 次変換という．特に，点 P を原点からのベクトル $\vec{OP}$ と同一視すると，その 1 次変換を点や図形に適用することができる．

1 次変換の行列　座標系を定めると，1 次変換が表現行列で一意的に決められる．

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

例　$f(\vec{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\vec{v}$ が線 $x = y$ に対する対称点を返す 1 次変換である．

定理 6.1.3 (1 次変換と直線)　f を平面または空間の *1* 次変換とする．このとき f が

(1) 直線を直線に移す

(2) 平行な直線を平行な直線に移す

(3) 同じ直線上の線分の長さの比を変えない

定理 6.1.4 (1 次変換と面積)　平面の *1* 次変換 f のある正規直交基に関する表現行列を F とし，$\det(F) \neq 0$ とする．そのとき，f によって任意の三角形 ABC が三角形 $A'B'C'$ に移され，ABC の面積を S，$A'B'C'$ の面積を S' とすると，

$$S' = S \ \det(F)$$

正射影　$\vec{o}$ でないベクトル $\vec{n}$ と任意のベクトル $\vec{u}$ に対し，$\vec{u} - k\vec{n}$ が $\vec{n}$ と直交するような k 唯一存在する．そのとき $k\vec{n}$ を $\vec{u}$ の $\vec{n}$ への正射影という．具体的には

$$k = \frac{(\vec{n}, \vec{u})}{(\vec{n}, \vec{n})}$$

例　正規直交基をそなえた空間 $\boldsymbol{R}^3$ において，$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ かつ $||\vec{n}|| = 1$ とする．$\vec{u}$ を $\vec{n}$ に対する正射影に移す関数 f が線形変換であることを示し，その表現行列を求めよ．