固有値とトレース

Jacques Garrigue, 2016 年 12 月 16 日

トレース $A = [a_{ij}]$ を n 次正方行列とする．対角成分の総和をトレースといい，$\mathrm{tr}(A)$ と書く．

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

定理 5.4.1 正方行列 A の固有多項式が $g_A(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ であるとする．そのとき

$$a_{n-1} = -\mathrm{tr}(A) \qquad\qquad a_0 = (-1)^n \mathrm{det}(A)$$

定理 5.4.2 同値な正方行列のトレースは等しい．すなわち，P が正則なら，$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

定理 5.4.3 正方行列 A が対角化可能で，A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする．そのとき，

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \dim(W(\lambda_i; T_A))$$

対角化不可能な行列の例 以下のような行列が ($\boldsymbol{C}$ においても) 対角できない．

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

λ はただ 1 つの固有値で，λ の固有空間は $\{\vec{c}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid c \in \boldsymbol{R}\}$ で，次元は 1.

正方行列 A が対角化不可能な場合でも，固有多項式を $g_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_r)^{n_r}$ という形で書ける ($\boldsymbol{C}$ で根 λ_i を求めた場合)．そのとき，各固有空間の次元は固有多項式における次数以下である．

$$\dim(W(\lambda_i; T_A)) \leq n_i$$