ベクトル空間

Jacques Garrigue, 2016 年 10 月 7 日

実数体　前期に行列やベクトルに使われる数 (スカラー) について詳しく言及しなかったが，必要な計算を可能にするために，体という構造を持っていなければならない．

$\langle \boldsymbol{K}, 0, +, -, 1, \cdot, ^{-1} \rangle$ が体であるとは，以下の条件をみたしていることをいう．

- $0, 1$ は $\boldsymbol{K}$ の元であり, 任意の $\boldsymbol{K}$ の元 a, b について $a + b, -a, a \cdot b$ も $\boldsymbol{K}$ の元である．
  また $a \neq 0$ ならば，a^{-1} も $\boldsymbol{K}$ の元である．
- $\langle \boldsymbol{K}, 0, +, - \rangle$ は可換群である:
  $a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a + 0 = a, \quad a + (-a) = 0$
- 同様に，$a \cdot b = b \cdot a, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad a \cdot 1 = a, \quad a \cdot a^{-1} = 1$
  (ただし最後は $a \neq 0$ のとき)
- 分配律がなりたつ: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

体の例として，有理数 $\boldsymbol{Q}$，実数 $\boldsymbol{R}$，複素数 $\boldsymbol{C}$ があげられる．ここではスカラーが実数であるとしているが，他の体を使ってもいい．

逆に，整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ は乗算の逆元 a^{-1} をもたないので，体ではない．スカラーが体でないと一般的に逆行列が計算できなかったり，不都合が生じる．

ベクトル空間　集合 V と体 $\boldsymbol{K}$ に対してが和とスカラー倍が任意の元に対して定義され，

$$\begin{array}{ll} \vec{u} + \vec{v} & (\vec{u}, \vec{v} \in V) \\ k\vec{u} & (k \in \boldsymbol{K}, \vec{u} \in V) \end{array}$$

かつ以下の性質がみたされたとき，V が $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間だという．

$$\begin{array}{llll} \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} & \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} & \vec{u} + \vec{o} = \vec{u} & 0\vec{u} = \vec{o} \\ k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v} & (k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u} & (kl)\vec{u} = k(l\vec{u}) & 1\vec{u} = \vec{u} \end{array}$$

ベクトル空間の例　以下の集合が $\boldsymbol{R}$ 上でベクトル空間である．

(1) $\boldsymbol{R}^n$ は成分を $\boldsymbol{R}$ にとる長さ n の列ベクトルから作られた集合 $\boldsymbol{R}^n$．

$$\boldsymbol{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mid a_i \in \boldsymbol{R} (1 \leq i \leq n) \right\}$$

(2) 同様に，長さ n の行ベクトルを集めた $\boldsymbol{R}_n$．

(3) 実数を係数とする 1 変数の多項式 $\boldsymbol{R}[x]$．

(4) 区間 (a, b) で連続な実数値関数の集合 $C(a, b)$．

部分空間　V の部分集合 W が V の和とスカラー倍によってベクトル空間となるとき，W が V の部分空間という.

定理 1 W が V であるために以下の条件が必要十分である.

(1) $\vec{o} \in W$

(2) $\vec{u}, \vec{v} \in W$ ならば，$\vec{u} + \vec{v} \in W$

(3) $\vec{u} \in W, r \in \boldsymbol{R}$ ならば，$r\vec{u} \in W$

例　次数が n 以下の 1 変数の多項式の集合 $\boldsymbol{R}[x]_n$ は $\boldsymbol{R}[x]$ の部分空間である.

例題　A が $m \times n$ 行列のとき，次の W は $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間であることを示せ.

$$W = \{\vec{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{o}\}$$

解の空間　同次形の n 変数の連立 1 次方程式の解の集合が $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間である．$A\vec{x} = \vec{o}$ の解の集合を解の空間と呼ぶ.

例題　次の W が $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間となるかどうか調べよ.

(1) $W = \left\{ \vec{x} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x^3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right\}$

(2) $W = \left\{ \vec{x} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x^3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{array} \right\}$

例題　次の W が $\boldsymbol{R}[X]_3$ の部分空間となるかどうか調べよ.

(1) $W = \{f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f(-1) = 0\}$

(2) $W = \{f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_3 \mid f(1) = 1\}$

(3) $W = \{f(x) \in \boldsymbol{R}[x]_3 \mid xf'(x) = 2f(x)\}$