クラマーの公式と特別な行列式

Jacques Garrigue, 2016 年 7 月 22 日

クラマーの公式

定理 1 *A が n 次正方行列ならば, 連立 1 次方程式*

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の解は次のように書ける.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i = \frac{\det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{b}} \dots \vec{a}_n]}{\det(A)}$$

$[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{b}} \dots \vec{a}_n]$ は A の i 列目を $\vec{b}$ に置き換えた行列.

証明 $\vec{b} = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$ から

$$\begin{aligned} \det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{b}} \dots \vec{a}_n] &= x_1 \det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{a}_1} \dots \vec{a}_n] + \dots + x_n \det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{a}_n} \dots \vec{a}_n] \\ &= x_i \det[\vec{a}_1 \dots \overset{i}{\vec{a}_i} \dots \vec{a}_n] = x_i \det(A) \end{aligned}$$

特別な形の行列式

ヴァンデルモンドの行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

多項式

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & -1 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$