

余因子と余因子行列

Jacques Garrigue, 2016 年 7 月 15 日

余行列 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して, i 行目と j 列目を除いた行列を A_{ij} と書く.

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ \hline a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right]$$

余因子展開 列ベクトル分割 $A = [a_{ij}] = [\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n]$ を考える.

各単位列ベクトル $\vec{e}_k = [\delta_{ik}]$ を使って, \vec{a}_j を成分ごとに分けられる.

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n$$

行列式の分配定理より,

$$|A| = \left| \vec{a}_1 \cdots a_{1j}\vec{e}_1 \cdots \vec{a}_n \right| + \left| \vec{a}_1 \cdots a_{2j}\vec{e}_2 \cdots \vec{a}_n \right| + \cdots + \left| \vec{a}_1 \cdots a_{nj}\vec{e}_n \cdots \vec{a}_n \right|$$

さらに, 列と行の置換を行うと,

$$\left| \vec{a}_1 \cdots a_{ij}\vec{e}_i \cdots \vec{a}_n \right| = (-1)^{j-1} \left| a_{ij}\vec{e}_i \vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n \right| = (-1)^{i+j-2} \left| \begin{array}{c|ccc} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \hline O & & & A_{ij} \end{array} \right| = (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

まとめると, j 列目に対する余因子展開が得られる.

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|$$

同様に, i 行目に対する余因子展開が得られる.

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

行列式の再帰的な定義 A を n 次正方行列とする. 行列式 $\det_n(A)$ を以下の漸化式によって定義できる.

$$\begin{cases} \det_1[a] = a \\ \det_{k+1}[a_{ij}] = (-1)^0 a_{11} \det_k(A_{11}) + \cdots + (-1)^k a_{(k+1)1} \det_k(A_{(k+1)1}) \end{cases}$$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ を余因子展開で計算せよ.

余因子 $A = [a_{ij}]$ とする. a_{ij} に対する余因子は $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ と定める.

余因子行列 各成分の余因子を集めた転置行列を余因子行列 $\tilde{A} = {}^t[\tilde{a}_{ij}]$ と定める. 定義から, ${}^t\tilde{A} = \tilde{A}$.

定理 1 正方行列 A の余因子行列を \tilde{A} とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E$$

定理 2 A が正則行列であると $\det(A) \neq 0$ は同値. また $\det(A) \neq 0$ ならば

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

系 2.1 A, B が正方行列で $AB = E$ ならば, B は A の逆行列.

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の余因子行列と逆行列を計算せよ.

置換の復習

合成 置換の合成は関数の合成と同様に定義されている: $\sigma\tau(i) = (\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$.

特に $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 \cdots a_m \\ b_1 \cdots b_m \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} c_1 \cdots c_l \\ d_1 \cdots d_l \end{pmatrix}$ のときに, 以下のような場合分けができる

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) = \begin{cases} i & i \notin \{c_1 \cdots c_l\} \cup \{a_1 \cdots a_m\} \\ d_j & i = c_j \text{ かつ } c_j \notin \{a_1 \cdots a_m\} \\ b_j & i \notin \{c_1 \cdots c_l\} \text{ かつ } i = a_j \\ b_k & i = c_j \text{ かつ } c_j = a_k \end{cases}$$

互換分解 巡回を互換に分解すると, 各互換が重なるので, 一つの入力に対して複数の互換が作動することがある.

$$(3\ 6\ 5\ 7) = (3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)$$

$$(3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)(1) = 1$$

1 がどの互換にも現われない

$$(3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)(6) = (3\ 7)(3\ 5)(3) = (3\ 7)(5) = 5$$

$$(3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)(3) = (3\ 7)(3\ 5)(6) = 6$$

$$(3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)(5) = (3\ 7)(3\ 5)(5) = (3\ 7)(3) = 7$$

一般的には

$$(k_1\ k_2 \cdots k_r) = (k_1\ k_r) \cdots (k_1 k_2)$$

$$(k_1\ k_r) \cdots (k_1 k_2)(k_1) = (k_1\ k_r) \cdots (k_1 k_3)(k_2) = k_2 \quad k_2 \notin \{k_1, k_3, \dots, k_r\}$$

$$(k_1\ k_r) \cdots (k_1 k_2)(k_r) = (k_1\ k_r)(k_r) = k_1 \quad k_r \notin \{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}\}$$

$$(k_1\ k_r) \cdots (k_1 k_2)(k_i) = (k_1\ k_r) \cdots (k_1 k_i)(k_i) = \quad k_i \notin k_1, \dots, k_{i-1}$$

$$(k_1\ k_r) \cdots (k_1 k_{i+1})(k_1) = (k_1\ k_r) \cdots (k_1 k_{i+2})(k_{i+1}) = k_{i+1} \quad k_{i+1} \notin k_{i+2}, \dots, k_r$$