行列式

Jacques Garrigue, 2016 年 7 月 1 日

行列式　n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対し

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

とおき, A の行列式と呼ぶ. A の行列式は以下のように書くこともある.

$$|A|, \ |a_{ij}|, \ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例　S_2, S_3 で 2 次正方行列と 3 次正方行列の行列式が計算できる. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

定理 1　A が正方行列なら $|{}^tA| = |A|$

証明　$A = [a_{ij}]$ とする. 定義から
$$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$
σ が置換なので, $\sigma(\{1, \dots, n\}) = \{1, \dots, n\}$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$
また, $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ から
$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$
σ が S_n を動くときに σ^{-1} も S_n を動くので
$$= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \dots a_{n\tau(n)} = |A|$$

定理 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明　一つ目に関して, $\sigma(1) \neq 1$ だと積が 0 になるので, $A = [a_{ij}]$ とすると,

$$|a_{ij}| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = a_{11} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\tau) a_{2(\tau(1)+1)} \dots a_{n(\tau(n-1)+1)} = a_{11} |a_{ij}|_{i,j \geq 2}$$

二つ目に関して, 転置行列を考えると一つ目になる.

例題　以下の行列式を計算せよ

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} E_n \end{vmatrix}$$

系 1 三角行列の行列式の値は対角成分の積である．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

定理 3 (1) *1* つの行を c 倍すると行列式が c 倍になる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 一行だけが異なる二つの行列式の足し算はその行だけを足した行列式と等しい.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}+c_{i1} & \dots & b_{in}+c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 4 (1) *2* つの行を入れ替えると行列式の値が -1 倍になる.

(2) i 番目の行を *1* 番に持って来る *(* 間の行が一つずつ下る *)* と，行列式の値が $(-1)^{i-1}$ 倍になる．

(3) *2* つの行が等しい行列の行列式は *0* である.

定理 5 ある行に別の行を足しても行列式の値が変わらない.

上記の定理 2〜4 より, 行列式を簡約化で計算できる.

定理 6 n 次正方行列 A の階数が n でない場合, $|A| = 0$.

例題 以下の行列式を計算せよ

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$