行列・ベクトル・演算

Jacques Garrigue, 2016 年 4 月 15 日

行列　$m \times n$ 個の数 a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ を長方形に並べたものを m **行** n **列の行列**, または $m \times n$ **行列**という.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{または} A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} は行列 A の (i, j) **成分**である.

逆に, $A = [a_{ij}]$ や $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ というように, A を成分から定義することもある. 前者では i と j の範囲があらかじめ分からなければならない.

行列 A の上から i 番目の**行**は a_{ij} $(j = 1, \ldots, n)$ で構成される:　$[a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}]$

同様に、行列 A の左から j 番目の**列**は a_{ij} $(i = 1, \ldots, m)$ で構成される: $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

零行列　全ての成分が 0 の $m \times n$ 行列を零行列といい, $O_{m,n}$ と書く.

正方行列　行と列の数が等しい行列を正方行列という. $n \times n$ の正方行列を n 次正方行列ともいう.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ならば, $a_{ii} (i = 1, \ldots, n)$ の成分を**対角成分**という. 対角成分以外の成分が全て 0 ならば, A が**対角行列**だという.

対角成分が全て 1 の対角行列が**単位行列**である. E または E_n($n \times n$ 行列の場合) と書く.

例えば, 3 次の単位行列は $E = E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である.

対角成分が全て等しい対角行列を**スカラー行列**という. 零行列や単位行列はスカラー行列である.

転置行列　行列 A の行と列を入れ替えた行列を A の転置行列といい, ${}^tA$ と書く.

$${}^t[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ji}]_{n \times m} \quad b_{ji} = a_{ij}\ (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

A が $m \times n$ 行列ならば, ${}^tA$ は $n \times m$ 行列になる.

ベクトル　$1 \times n$ 行列を n 次の**行ベクトル**という. 同様に $n \times 1$ 行列を n 次の**列ベクトル**という. 行ベクトルと列ベクトルを併せて**数ベクトル**という.

成分が全て 0 の数ベクトルを零ベクトルといい, $\mathbf{0}$ と書く.

例　$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ のとき以下を求めよ

1. A の型 ($m \times n$ 行列の m と n)
2. A の $(2, 1)$ 成分
3. A の第 2 行, A の第 3 列
4. ${}^tA$

行列の和と差　A と B がともに $m \times n$ 行列とする. $A+B$ および $A-B$ は各成分の和と差によって定義される.

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}] \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \ (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$$

$$[a_{ij}] - [b_{ij}] = [d_{ij}] \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \ \ (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$$

行列のスカラー倍　A が行列で c が数 (スカラーともいう) のとき, A の c 倍 cA は A の全ての成分をその c 倍にした行列である: $c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$.
　A がスカラー行列なら, ある a が存在し, $A = aE$.

行列の積　A が $m \times n$ 行列で B が $n \times r$ 行列のとき, A と B の積 AB は以下の通り定義される $m \times r$ 行列である. $A = [a_{ij}]_{m\times n},\ B = [b_{jk}]_{n\times r}$ として,

$$AB = [a_{ij}]_{m\times n}[b_{jk}]_{n\times r} = [c_{ik}]_{m\times r} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \ \ (i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, r)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \ldots & b_{1k} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & b_{nk} & \ldots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & c_{ik} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \end{array} \qquad c_{ik} = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$$

例

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \end{array} = \begin{bmatrix} 1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8 \\ 3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

行列の演算に関する性質　左辺が定義されているとき, 以下の性質が成り立つ

和の性質	$A+B = B+A$ (可換律), $A+0 = A$ (単位元),
	$(A+B)+C = A+(B+C)$ (結合律)
積の性質	$AE = EA = A$ (単位元), $AO = O$, $OA = O$ (吸収元),
	$(AB)C = A(BC)$ (結合律)
スカラー倍	$0A = O$, $1A = A$, $a(bA) = (ab)A$, $a(AB) = (aA)B$
分配率	$a(A+B) = aA + aB$, $(a+b)A = aA + bA$,
	$A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$
転置	${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

例　A, B が正方行列とする. 以下の方程式が正しいかどうか調べよ.

1. $A^2 + 3E + 2E = (A+2E)(A+E)$
2. $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

冪零行列　正方行列 A について, $A^m = O$ となるような m が存在すれば, A は冪零行列という.