行列の簡約化

Jacques Garrigue, 2015 年 5 月 22 日

簡約な行列

主成分　ある行の中で 0 でない最初の成分を**主成分**という．行ベクトル $\vec{a} = [\ a_1 \dots a_i \dots a_n\ ]$ において，a_i が $\vec{a}$ の主成分とは，$a_i \neq 0$ かつ $a_j = 0$ $(j < i)$ ということになる．

簡約な行列　ある行列 $A = [a_{ij}]$ が**簡約**というには，以下の条件を満たさなければならない．

(I) 零ベクトルでない行の主成分が 1 である．

(II) 各行の先頭の 0 の数が増えて行く．すなわち，行 i の主成分が a_{ik_i} だとすると，それより下の行は零ベクトルまたは主成分 a_{jk_j} は k_i より右にある: $j > i$ ならば $k_j > k_i$.

(III) 主成分を含む列ベクトルの他の成分は全て 0 である．

例　簡約な行列の例

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 7 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

例題　次の行列が簡約でない理由を考え，基本変形により簡約な行列に変形せよ．

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

行列の簡約化　以下の手続きによって，任意の行列を簡約な行列に変形できる．

(1) 零ベクトルでない各行を主成分で割る．(I) が満たされる．

(2) 主成分の位置の順に行を並べ変える．

(3) 同じ主成分の行が複数ある場合，上の行をそれ以降の行から引き，(1) に戻る．
なければ，(II) が満たされる．

(4) ある行の主成分 $a_{ik_i} = 1$ の上に 0 でない成分 a_{jk_i} $(j < i)$ が残っている場合，j 行目から i 行目の a_{jk_i} 倍を引く．
大きな i から始め，なくなるまで繰り返す．終わると (III) が満たされる．

例題　上記の簡約か手続きを使い次の行列を簡約な行列に変形せよ．

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad (2) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

定理 1 任意の行列は基本変形を繰り返すことにより簡約化できる．また，与えられた行列の簡約化は唯一通り定まる．

行列の階数　行列 A の簡約化を B とするとき,

$$\mathrm{rank}(A) = B \text{の零ベクトルでない行の個数}$$

とおき A の階数という. 簡約な行列の各行の主成分は全て異なる列に属するから

$$\mathrm{rank}(A) = B \text{の行の主成分を含む列の個数}$$

でもり, 従って

定理 2 A が $m \times n$ 行列ならば, $\mathrm{rank}(A) \le m$ かつ $\mathrm{rank}(A) \le n$.

例題　次の行列の階数を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

連立 1 次方程式を解く

前に見たように, n 変数の連立 1 次方程式は係数行列 A を使い, $A\vec{x} = \vec{b}$ という形で表現できる.

また, 拡大係数行列を使うと, $[A \mid \vec{b}\,] \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \hline -1 \end{bmatrix} = \vec{o}$ となる.

ここで, 拡大係数行列の簡約化 C を考える. C の最後の列を除いた行列が A の簡約化でもあることに注目する (簡約化の結果が唯一なので, 簡約化手続きが最初の n 列について動作が変わらないことを確認すればいい).

- C が A の簡約化を含むので, $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) < \mathrm{rank}(A)$ はありえない.
- もしも $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) = \mathrm{rank}(A)$ ならば, 元の連立 1 次方程式が $\mathrm{rank}(A)$ 個の連立 1 次方程式と同値であり, 主成分以外の変数の値を選ぶことにより, それぞれの方程式が独立した解を持つ.
- もしも $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) > \mathrm{rank}(A)$ ならば, 列が一個しか増えていないので, $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) = \mathrm{rank}(A) + 1$. そして, 0 でない最後の行が最後の列だけが 0 ではないので, 解がない.

定理 3 連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解を持つ必要十分条件は

$$\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) = \mathrm{rank}(A)$$

例題　次の連立 1 次方程式を解け.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解の自由度　連立 1 次方程式が解を持つとき, 簡約な行列の形を見ると, 主成分を含まない列に当たる変数について, どんな値を決めても解が存在する. そういう変数の数を**解の自由度**と呼ぶ. 階数の定義から, 係数行列 A が $m \times n$ 行列とすると, 解の自由度は

$$n - \mathrm{rank}(A)$$

逆に, 解の自由度が 0 ならば, 解は一つしか存在しない.

定理 4 n 変数の連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に解が唯一存在する必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) = n$$