空間図形 (2)

Jacques Garrigue, 2015 年 5 月 1 日

座標形と方程式

注意　前回のプリントで点表示と区別するために幾何ベクトルを太字 $\mathbf{a}$ で示したが, これから板書と合わせるために $\vec{a}$ に改める.

線形独立・線形従属　n 個のベクトル $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ について, それぞれが残りのベクトルの線形結合として表せないとき, そのベクトル達が**線形独立**だという. 逆に, 残りのベクトルの線形結合として表せるベクトルがある場合, **線形従属**だという.

例

(i) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が空間の基底であることを示せ.

$k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{o}$ が $(0,0,0)$ 以外の解を持たないことを示せばいい.

(ii) $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ を上の $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ の線形結合として表せ.

$k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} = \vec{x}$ の解を見つければいい.

座標系と点の座標　平面 (空間) の基底に一つの定点 O を加えると, 平面 (空間) の**座標系** $\{O; \vec{e}_1, \dots \vec{e}_n\}$ が得られる. O は**原点**, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ は**基本ベクトル**という. 任意の点 A について, $\vec{OA}$ の成分が A の**座標**になる.

直線　点 $\vec{p}$ を通って方向ベクトルが $\vec{a}$ の直線 (l) は, (l) 上の任意の点を $\vec{x}$ とするとき,

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{a} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

と表される. これを直線 (l) のベクトル表示という.

定理 2　(i) $\vec{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とすれば, 直線 (l) の方程式は

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases} \qquad \text{または} \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

(ii) $\vec{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とすれば, 直線 (l) の方程式は

$$\begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases} \qquad \text{または} \qquad \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

ただし, 分母が 0 のときは分子も 0 とする.

平面　点 $\vec{p}$ を通って線形独立な 2 つのベクトルが $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で張られる平面 (π) は, (π) 上の任意の点を $\vec{x}$ とするとき,

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{a} + s\vec{b} \quad (-\infty < t, s < \infty)$$

と表される. これを平面 (π) のベクトル表示という.

定理 3 $\vec{p} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ とすれば, 平面 (π) の方程式は

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 + sb_1 \\ y = y_0 + ta_2 + sb_2 \\ z = z_0 + ta_3 + zb_3 \end{cases}$$

または, s, t を消去した *1* 次方程式によって

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

と表される.

例

(i) 2 点 $A(-1, 3, 2), B(2, 5, 1)$ を通る直線の方程式を求めよ.

(ii) $C(1, 1, 0)$ を通って, (i) の直線を含む平面の方程式を求めよ.