空間図形

Jacques Garrigue, 2015 年 4 月 24 日

幾何ベクトル　空間の二つの線分 $\vec{AB}$ と $\vec{CD}$ の向きと長さが同じときに, その二つが幾何ベクトルとして等価であるといい, $\vec{AB} = \vec{CD}$ と書く. 線分を書かずに, 幾何ベクトルを名前で指すこともできる $\vec{a} = \vec{AB}$. 長さ 0 のベクトル $\vec{o} = \vec{AA}$ は向きを持たず, 零ベクトルという.

幾何ベクトルの和と差　二つの幾何ベクトルが $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ と表せたとき, その和が $\vec{AC}$ になる. 同様に $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$. 特に $-\vec{AB} = \vec{AA} - \vec{AB} = \vec{BA}$, 同じ長さで向きが逆のベクトル.

幾何ベクトルの実数倍　ベクトル $\vec{a}$ と同じ向きで長さが k 倍 (k は正の実数) の幾何ベクトルを $k\vec{a}$ と書く. 特に $0\vec{a} = \vec{o}$. また, 負の実数に関して, $(-k)\vec{AB} = k(-\vec{AB}) = k\vec{BA}$.

幾何ベクトルの性質　幾何ベクトルは数ベクトルと同じ性質を持っている. 特に和の性質・スカラー倍の性質・分配率がそのまま利用できる.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \qquad \vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$$
$$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b} \qquad (k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a} \qquad (kl)\vec{a}=k(l\vec{a}) \qquad 1\vec{a}=\vec{a} \qquad 0\vec{a}=\vec{o}$$

ベクトルの並行　零でない二つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ が並行であることは, $\vec{a} = k\vec{b}$ となるような k が存在することと等価である.

位置ベクトル　基点 O を定めると, 任意の点 A をベクトル $\vec{OA}$ として表すことができる. 逆に「点 $\vec{a}$」という表現は位置ベクトル $\vec{a}$ が定める点を指す.

例 (内分点・外分点)　2 点 $\vec{a},\vec{b}$ に対して, $\vec{a}$ から $\vec{b}$ に至る線分を $m:n$ の比に

(i) 内分する点の位置ベクトルは $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$,

(ii) 外分する点の位置ベクトルは $\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ (ただし $m \neq n$).

問　3 角形 ABC の辺 AB, AC を $m:n$ に内分する点をそれぞれ M, N とするとき, MN と BC が並行であることを示せ.

線形結合　n 個の幾何ベクトル $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ が与えられた時, あるベクトル $\vec{b}$ が $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n$ として表現できたとき, $\vec{b}$ は $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ の線形結合だと言う.

基底　n 個の幾何ベクトル $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ について, 任意の幾何ベクトル $\vec{a}$ が $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ の線形結合で, かつ全ての i について $\vec{e}_i$ が $\vec{e}_i$ 以外の $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ の線形結合でなければ, $\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ は**基底**である. $n=2$ のときは平面の基底, $n=3$ のとおきは空間の基底という.

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n$$

から得られた $(a_1, \ldots, a_n)$ を $\vec{a}$ の**成分**という. $\vec{a}$ とその各成分から作った列ベクトルを同一視できる.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

定理 1 (成分の一意性) もしも $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + \ldots + a_n\vec{e}_n$ かつ $\vec{a} = a'_1\vec{e}_1 + \ldots + a'_n\vec{e}_n$ ならば, $a_i = a'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

証明 簡単のために, $a_1 \neq a'_1$ と仮定する. 和と実数倍の性質から, $(a_1 - a'_1)\vec{e}_1 = (a_2 - a'_2)\vec{e}_2 + \ldots + (a_n - a'_n)\vec{e}_n$ となるので,

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{a_1 - a'_1}\left[(a_2 - a'_2)\vec{e}_2 + \ldots + (a_n - a'_n)\vec{e}_n\right]$$

これが基底の定義と矛盾するので, 全ての成分が同じでなければならない.

数ベクトルの性質 上記の幾何ベクトルの性質を使えば, 幾何ベクトルの演算が数ベクトル上でもできることが分かる.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, k \in \mathbf{R} \text{ ならば } \vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}, k\vec{a} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

座標系と点の座標 平面 (空間) の基底に一つの定点 O を加えると, 平面 (空間) の**座標系** $\{O; \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n\}$ が得られる. 任意の点 A について, $\vec{OA}$ の成分が A の**座標**になる.