クラマーの公式と特別な行列式

Jacques Garrigue, 2015 年 7 月 17 日

訂正 前回のプリントでは余因子行列の定義が間違っていた．ここで分かりやすさのために教科書と少し違う定義を使う (他の教科書を参考にした).

余因子 $A = [a_{ij}]$ とする．a_{ij} に対する余因子は $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ と定める．

余因子行列 各成分の余因子を集めた転置行列を余因子行列 $\widetilde{A} = {}^t[\tilde{a}_{ij}]$ と定める．定義から, ${}^t\widetilde{A} = \widetilde{{}^tA}$.

クラマーの公式

定理 1 A が n 次正方行列ならば, 連立 *1* 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

の解は次のように書ける．

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i = \frac{\det[\vec{a}_1 \ldots \overset{i}{\vec{b}} \ldots \vec{a}_n]}{\det(A)}$$

$[\vec{a}_1 \ldots \overset{i}{\vec{b}} \ldots \vec{a}_n]$ は A の i 列目を $\vec{b}$ に置き換えた行列.

証明 $\vec{b} = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n$ から

$$\begin{aligned} \det[\vec{a}_1 \ldots \overset{i}{\vec{b}} \ldots \vec{a}_n] &= x_1\det[\vec{a}_1 \ldots \overset{i}{\vec{a}_1} \ldots \vec{a}_n] + \ldots + x_n\det[\vec{a}_1 \ldots \overset{i}{\vec{a}_n} \ldots \vec{a}_n] \\ &= x_i\det[\vec{a}_1 \ldots \overset{i}{\vec{a}_i} \ldots \vec{a}_n] = x_i \det(A) \end{aligned}$$

特別な形の行列式

ヴァンデルモンドの行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

多項式

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & -1 \\ a_n & 0 & \ldots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$