余因子と余因子行列

Jacques Garrigue, 2015 年 7 月 10 日

置換の合成　置換の合成は関数の合成と同様に定義されている: $\sigma\tau(i) = (\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i))$.

特に $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_m \\ b_1 \dots b_m \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} c_1 \dots c_l \\ d_1 \dots d_l \end{pmatrix}$ のときに, 以下のような場合分けができる

$$\sigma\tau(i) = \sigma(\tau(i)) = \begin{cases} i & i \notin \{c_1 \dots c_l\} \cup \{a_1 \dots a_m\} \\ d_j & i = c_j \text{かつ } c_j \notin \{a_1 \dots a_m\} \\ b_j & i \notin \{c_1 \dots c_l\} \text{ かつ } i = a_j \\ b_k & i = c_j \text{かつ } c_j = a_k \end{cases}$$

巡回分解　置換を巡回分解すると, それぞれの巡回が重ならないので, 合成で最後の場合が起きない. 必ず一つの巡回しか使われない.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2)(3\ 6\ 7) = (3\ 6\ 7)(1\ 4\ 2)$$

$$\begin{aligned} \sigma(4) &= (1\ 4\ 2)((3\ 6\ 7)(4)) = (1\ 4\ 2)(4) = 2 \\ \sigma(7) &= (1\ 4\ 2)((3\ 6\ 7)(7)) = (1\ 4\ 2)(3) = 3 \\ \sigma(5) &= (1\ 4\ 2)((3\ 6\ 7)(5)) = (1\ 4\ 2)(5) = 5 \end{aligned}$$

互換分解　巡回を互換に分解すると, 各互換が重なるので, 一つの入力に対して複数の互換が作動することがある.

$$(3\ 6\ 5\ 7) = (3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)$$

$$\begin{array}{ll} (3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)(1) = 1 & 1 \text{ がどの互換にも現われない} \\ (3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)(6) = (3\ 7)(3\ 5)(3) = (3\ 7)(5) = 5 & \\ (3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)(3) = (3\ 7)(3\ 5)(6) = 6 & \\ (3\ 7)(3\ 5)(3\ 6)(5) = (3\ 7)(3\ 5)(5) = (3\ 7)(3) = 7 & \end{array}$$

一般的には

$$(k_1\ k_2 \dots k_r) = (k_1\ k_r) \dots (k_1 k_2)$$

$$\begin{array}{ll} (k_1\ k_r) \dots (k_1 k_2)(k_1) = (k_1\ k_r) \dots (k_1 k_3)(k_2) = k_2 & k_2 \notin \{k_1, k_3, \dots, k_r\} \\ (k_1\ k_r) \dots (k_1 k_2)(k_r) = (k_1\ k_r)(k_r) = k_1 & k_r \notin \{k_1, k_2, \dots, k_{r-1}\} \\ (k_1\ k_r) \dots (k_1 k_2)(k_i) = (k_1\ k_r) \dots (k_1 k_i)(k_i) = & k_i \notin k_1, \dots, k_{i-1} \\ (k_1\ k_r) \dots (k_1 k_{i+1})(k_1) = (k_1\ k_r) \dots (k_1 k_{i+2})(k_{i+1}) = k_{i+1} & k_{i+1} \notin k_{i+2}, \dots, k_r \end{array}$$

余行列　n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して, i 行目と j 列目を除いた行列を A_{ij} と書く.

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ \hline a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{array}\right]$$

余因子展開　列ベクトル分割 $A = [a_{ij}] = [\vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n]$ を考える.

各単位列ベクトル $\vec{e}_k = [\delta_{ik}]$ を使って, $\vec{a}_j$ を成分ごとに分けられる.

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \ldots + a_{nj}\vec{e}_n$$

行列式の分配定理より,

$$|A| = \left| \ \vec{a}_1 \ldots a_{1j}\vec{e}_1 \ldots \vec{a}_n \ \right| + \left| \ \vec{a}_1 \ldots a_{2j}\vec{e}_2 \ldots \vec{a}_n \ \right| + \ldots + \left| \ \vec{a}_1 \ldots a_{nj}\vec{e}_n \ldots \vec{a}_n \ \right|$$

さらに, 列と行の置換を行うと,

$$\left| \ \vec{a}_1 \ldots a_{ij}\vec{e}_i \ldots \vec{a}_n \ \right| = (-1)^{j-1} \left| \ a_{ij}\vec{e}_i \ \vec{a}_1 \ldots \vec{a}_n \ \right| = (-1)^{i+j-2} \left| \begin{array}{c|c} a_{ij} & a_{i1} \ldots a_{in} \\ \hline O & A_{ij} \end{array} \right| = (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

まとめると, j **列目に対する余因子展開**が得られる.

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j} |A_{1j}| + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} |A_{nj}|$$

同様に, i **行目に対する余因子展開**が得られる.

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} |A_{in}|$$

行列式の再帰的な定義　A を n 次正方行列とする. 行列式 $\det_n(A)$ を以下の漸化式によって定義できる.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \det_1[a] & = & a \\ \det_{k+1}[a_{ij}] & = & (-1)^0 a_{11} \det_k(A_{11}) + \ldots + (-1)^k a_{(k+1)1} \det_k(A_{(k+1)1}) \end{array} \right.$$

例　$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ を余因子展開で計算せよ.

余因子　$A = [a_{ij}]$ とする. a_{ij} に対する余因子は $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ と定める.

余因子行列　各成分の余因子を集めた転置行列を余因子行列 $\widetilde{A} = {}^t[\tilde{a}_{ij}]$ と定める. 定義から, ${}^t\widetilde{A} = \widetilde{{}^tA}$.

定理 1 正方行列 A の余因子行列を $\widetilde{A}$ とすると

$$A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E$$

定理 2 A が正則行列であると $\det(A) =\neq 0$ は同値. また $\det(A) \neq 0$ ならば

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

系 2.1 A, B が正方行列で $AB = E$ ならば, B は A の逆行列.

例　$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の余因子行列と逆行列を計算せよ.