行列・ベクトル・演算

Jacques Garrigue, 2015 年 4 月 10 日

行列 $m \times n$ 個の数 a_{ij} $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$ を長方形に並べたものを m **行** n **列の行列**, または $m \times n$ **行列**という.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ または } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} は行列 A の (i, j) **成分**である.

逆に, $A = [a_{ij}]$ や $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ というように, A を成分から定義することもある. 前者では i と j の範囲があらかじめ分からなければならない.

行列 A の上から i 番目の**行**は a_{ij} $(j = 1, \dots, n)$ で構成される: $[a_{i1}\ a_{i2}\ \dots\ a_{in}]$

同様に、行列 A の左から j 番目の**列**は a_{ij} $(i = 1, \dots, m)$ で構成される: $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$

零行列 全ての成分が 0 の $m \times n$ 行列を零行列といい, $O_{m,n}$ と書く.

正方行列 行と列の数が等しい行列を正方行列という. $n \times n$ の正方行列を n 次正方行列ともいう.

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ならば, $a_{ii} (i = 1, \dots, n)$ の成分を**対角成分**という. 対角成分以外の成分が全て 0 ならば, A が**対角行列**だという.

対角成分が全て 1 の対角行列が**単位行列**である. E または E_n($n \times n$ 行列の場合) と書く.

例えば, 3 次の単位行列は $E = E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ である.

対角成分が全て等しい対角行列を**スカラー行列**という. 零行列や単位行列はスカラー行列である.

転置行列 行列 A の行と列を入れ替えた行列を A の転置行列といい, ${}^t\!A$ と書く.

$${}^t[a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ji}]_{n \times m} \quad b_{ji} = a_{ij}\ (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$$

A が $m \times n$ 行列ならば, ${}^t\!A$ は $n \times m$ 行列になる.

ベクトル $1 \times n$ 行列を n 次の**行ベクトル**という. 同様に $n \times 1$ 行列を n 次の**列ベクトル**という. 行ベクトルと列ベクトルを併せて**数ベクトル**という.

成分が全て 0 の数ベクトルを例ベクトルといい, $\mathbf{0}$ と書く.

例 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ のとき以下を求めよ

1. A の型 ($m \times n$ 行列の m と n)
2. A の $(2, 1)$ 成分
3. A の第 2 行, A の第 3 列
4. ${}^t\!A$

行列の和と差　A と B がともに $m\times n$ 行列とする. $A+B$ および $A-B$ は各成分の和と差によって定義される.

$$[a_{ij}]+[b_{ij}]=[c_{ij}] \quad c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad (i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$$

$$[a_{ij}]-[b_{ij}]=[d_{ij}] \quad d_{ij}=a_{ij}-b_{ij} \quad (i=1,\dots,m; j=1,\dots,n)$$

行列のスカラー倍　A が行列で c が数 (スカラーともいう) のとき, A の c 倍 cA は A の全ての成分をその c 倍にした行列である: $c[a_{ij}]=[ca_{ij}]$.
　A がスカラー行列なら, ある a が存在し, $A=aE$.

行列の積　A が $m\times n$ 行列で B が $n\times r$ 行列のとき, A と B の積 AB は以下の通り定義される $m\times r$ 行列である. $A=[a_{ij}]_{m\times n},\ B=[b_{jk}]_{n\times r}$ として,

$$AB=[a_{ij}]_{m\times n}[b_{jk}]_{n\times r}=[c_{ik}]_{m\times r} \quad c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk} \quad (i=1,\dots,m; k=1,\dots,r)$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \dots & b_{1k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{nk} & \dots \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ik} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array} \qquad c_{ik}=\textstyle\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}=a_{i1}b_{1k}+\dots+a_{in}b_{nk}$$

例

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \end{array} = \begin{bmatrix} 1\times 5+2\times 7 & 1\times 6+2\times 8 \\ 3\times 5+4\times 7 & 3\times 6+4\times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

行列の演算に関する性質　左辺が定義されているとき, 以下の性質が成り立つ

和の性質	$A+B=B+A$ (可換律), $A+0=A$ (単位元),
	$(A+B)+C=A+(B+C)$ (結合律)
積の性質	$AE=EA=A$ (単位元), $AO=O$, $OA=O$ (吸収元),
	$(AB)C=A(BC)$ (結合律)
スカラー倍	$0A=O$, $1A=A$, $a(bA)=(ab)A$, $a(AB)=(aA)B$
分配率	$a(A+B)=aA+aB$, $(a+b)A=aA+bA$,
	$A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$
転置	${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$, ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

例　A,B が正方行列とする. 以下の方程式が正しいかどうか調べよ.

1. $A^2+3E+2E=(A+2E)(A+E)$
2. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

冪零行列　正方行列 A について, $A^m=O$ となるような m が存在すれば, A は冪零行列という.