正則行列

Jacques Garrigue, 2014 年 5 月 30 日

連立 1 次方程式を解く

前に見たように, n 変数の連立 1 次方程式は係数行列 A を使い, $A\vec{x} = \vec{b}$ という形で表現できる.

また, 拡大係数行列を使うと, $[A \mid \vec{b}\,] \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \hline -1 \end{bmatrix} = \vec{o}$ となる.

ここで, 拡大係数行列の簡約化 C を考える. C の最後の列を除いた行列が A の簡約化でもあることに注目する (簡約化の結果が唯一なので, 簡約化手続きが最初の n 列について動作が変わらないことを確認すればいい).

- C が A の簡約化を含むので, $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) < \mathrm{rank}(A)$ はありえない.
- もしも $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) = \mathrm{rank}(A)$ ならば, 元の連立 1 次方程式が $\mathrm{rank}(A)$ 個の連立 1 次方程式と同値であり, 主成分の変数の値を選ぶことにより, それぞれの方程式が独立した解を持つ.
- もしも $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) > \mathrm{rank}(A)$ ならば, 列が一個しか増えていないので, $\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) = \mathrm{rank}(A) + 1$. そして, 0 でない最後の行が最後の列だけが 0 ではないので, 解がない.

定理 1 連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ が解を持つ必要十分条件は

$$\mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) = \mathrm{rank}(A)$$

例題　次の連立 1 次方程式を解け.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解の自由度　連立 1 次方程式が解を持つとき, 簡約な行列の形を見ると, 主成分を含まない列に当たる変数について, どんな値を決めても解が存在する. そういう変数の数を**解の自由度**と呼ぶ. 階数の定義から, 係数行列 A が $m \times n$ 行列とすると, 解の自由度は

$$n - \mathrm{rank}(A)$$

逆に, 解の自由度が 0 ならば, 解は一つしか存在しない.

定理 2 n 変数の連立 1 次方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ に解が唯一存在する必要十分条件は

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}([A \mid \vec{b}\,]) = n$$

正則行列

逆行列　A は n 次正方行列とする. n 次正方行列 B が A の逆行列であるとは

$$AB = BA = E_n$$

を満たすときにいう.

A が逆行列をもつとき, A の逆行列がただ 1 つに決まる. B と C が共に A の逆行列ならば

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

正方行列 A が逆行列をもつとき, A は**正則行列**だという. A が正則行列のとき, A の逆行列を A^{-1} と書く.

定理 3 A, B は n 次正方行列で $AB = E$ ならば, B は A の逆行列である.

定理 4 A が n 次正方行列のとき, 次の (1)〜(5) は同値である.

(1) $\mathrm{rank}(A) = n$

(2) A の簡約化は E_n である

(3) $A\vec{x} = \vec{b}$ は任意の n 次ベクトル $\vec{b}$ に対し, ただ 1 つの解を持つ

(4) $A\vec{x} = \vec{o}$ の解は自明な解 $\vec{x} = \vec{o}$ に限る.

(5) A は正則行列である

証明　(1)〜(4) の同値性は簡約化から分かる.

(3) ⇒ (5) $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ を単位行列の各列ベクトルとする. $\vec{c}_i$ を $A\vec{x} = \vec{e}_i$ の解とする.
$C = [\ \vec{c}_1 \mid \ldots \mid \vec{c}_n\ ]$ とおくと, $AC = [A\vec{c}_1 \mid \ldots \mid A\vec{c}_n] = [\ \vec{e}_1 \mid \ldots \mid \vec{e}_n\ ] = E_n$.

(5) ⇒ (4) $A\vec{x} = \vec{o}$ と仮定すると, $\vec{x} = E\vec{x} = (A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{o} = \vec{o}$.

逆行列の計算　上記の (3) ⇒ (5) のように, n 個の連立方程式 $A\vec{c}_i = \vec{e}_i\ (i = 1, \ldots, n)$ を立て, A^{-1} をそれぞれの解を集めた行列として得ることができる,

$$A^{-1} = [\ \vec{c}_1 \mid \ldots \mid \vec{c}_n\ ].$$

このとき, 各 c_i は $[A \mid \vec{e}_i]$ を $[E \mid \vec{c}_i]$ に簡約化することで得られる. しかし, $\mathrm{rank}(A) = n$ のとき, いくら右に列を増やしても, 最初の n 列が E_n になったときに簡約化が終わり, 残りの列は追加した列の関数でしかない. それを考えると, 解きたい列ベクトルをまとめて係数行列に加えても, 結果が同じである. $[A \mid \vec{e}_1 \mid \ldots \mid e_n]$ の簡約化が $[E \mid \vec{c}_1 \mid \ldots \mid \vec{c}_n]$ になる. まとめると, 簡約化で

$$[A \mid E] \to [E \mid A^{-1}]$$

また $[A \mid E]$ を簡約化しても左の部分が E にならなければ, $\mathrm{rank}(A) \neq n$ なので, A は正則ではない.

例題　次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$