行列と連立１次方程式

Jacques Garrigue, 2014 年 5 月 16 日

連立１次方程式の表現

例題　次の等式を満たす x, y を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

解答　以下の連立 1 次方程式を解けばいい.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$$

係数行列　逆に連立 1 次方程式を係数行列と定数の列ベクトルという形で表現できる.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{を右のように書ける} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

両方の方程式が同値なので, 右の行列方程式も連立 1 次方程式と呼ぶことがある.

拡大係数行列　係数行列 A に定数の列ベクトル $\vec{b}$ を加えた行列を拡大係数行列と呼ぶ.

$$[\ A \mid \vec{b}\ ] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

連立 1 次方程式は次ののように表現できる: $[\ A \mid \vec{b}\ ] \left[\begin{array}{c} \vec{x} \\ \hline -1 \end{array}\right] = \vec{o}$

数ベクトルの１次結合　幾何ベクトルと同様に, 数ベクトルの 1 次結合が定義できる. これを行列の積として表現することもできる.

$$c_1\vec{a}_1 + \ldots + c_n\vec{a}_n = [\ \vec{a}_1 \mid \cdots \mid \vec{a}_n\ ] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

例　$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ から, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ の 1 次結合である.

例題　$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の 1 次結合として表せ.

基本変形

連立１次方程式の基本変形　連立 1 次方程式の解を変えない変形は以下の 3 つに分類できる.

(i) 1 つの式を (0 でない) 何倍かにする

(ii) 2 つの式を入れ替える

(iii) 1 つの式に他の式の何倍かを加える

例 $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x+2y=5 \end{cases} \overset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -y=-2 \\ x+2y=5 \end{cases} \overset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -y=-2 \\ x=1 \end{cases} \overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ -y=-2 \end{cases} \overset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

掃き出し法　上の３つの基本変形によって連立１次方程式を解く方法を掃き出し法と呼ぶ．各変形が解の集合を変えないので, 最終的に解が自明な連立１次方程式に辿り着けば, その解だけが元の連立１次方程式の解になる．

行列の (行) 基本変形　行列の次の３つの変形を (行) 基本変形と呼ぶ．

(i) １つの行を (0 でない) 何倍かにする

(ii) ２つの行を入れ替える

(iii) １つの行に他の式の何倍かを加える

なお, 掃き出し法を拡大係数行列に対して行っても, 効果が同じである．

例 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \overset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

この例で分かるように, 行列における掃き出し法の目的は係数の部分に当たる行列の左の部分を単位行列にすることである．

A を正方行列とする．もしも $\vec{x}$ が $A\vec{x}=\vec{b}$ の唯一の解であれば, $[\ A \mid \vec{b}\ ]$ から $[\ E \mid \vec{x}\ ]$ までの基本変形の列が存在する．

掃き出し法の正しさの証明　A を拡大係数行列とする．$\vec{x}' = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \hline -1 \end{bmatrix}$ とすると, $\vec{x}$ は 解であることと, $A\vec{x}'=\vec{o}$ は同値である．各変形が後者の解を変えないことを証明する．

(i) A' では A の i 行目 A_i が k 倍になっている ($k \neq 0$). $A'_i = kA_i$ と $A_i = \frac{1}{k}A'_i$ から $A_i\vec{x}'=0$ と $A'_i\vec{x}'=0$ は同値である．$j \neq i$ について $A_j = A'_j$ から $A_j\vec{x}=0$ と $A'_j\vec{c}=0$ は同値である．

(ii) A' では A の i 行目と j 行目が交換される．$A\vec{x}'$ の全ての成分が 0 ならば, 成分の順番が変わっても影響がない．

(iii) $A'_i = A_i + kA_j$, それ以外の行が変わらない．$A\vec{x}'=0$ と仮定すると $A'_i\vec{x}' = A_i\vec{x}' + kA_j\vec{x}' = 0$. 逆に $A'\vec{x}'=0$ と仮定すると, $A_i\vec{x}' = A'_i\vec{x}' - kA'_j\vec{x}' = 0$.

さらに, ステップの数に関する帰納法を使うと, 基本変形を n 回行うと解の集合が変わらないことが証明できる．

例題　次の連立１次方程式を拡大係数行列の基本変形を用いて解け．

$$\begin{cases} 2x+3y-z=-3 \\ -x+2y+2z=1 \\ x+y-z=-2 \end{cases}$$