空間図形

Jacques Garrigue, 2014 年 4 月 25 日

行列の応用：グラフと隣接行列

前回, 例としてグラフを紹介したが, もう少し形式的に説明する.

グラフ　$G = (V, E)$ は頂点の集合 V(vertices) と辺の集合 E(edges) からできている. E は V 上の二項関係である (頂点の対の集まり). E が対称的であれば G は無向グラフといい, そうでなければ有向グラフという.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ & \swarrow & \\ & C & \end{array}$$

上記のグラフを $(\{A, B, C\}, \{(A, B), (B, C)\})$ と表現できる.

隣接行列　各行と列に V の頂点を割り当て, i 番目と j 番目の頂点が辺で結ばれている場合には成分 ij を 1 とし, そうでなければ 0 とする行列を隣接行列という.

$$A = 1, B = 2, C = 3 \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

G が無向グラフであれば, M は対称行列になる.

また, M^n の i, j 成分は i 番目の頂点から j 番目の頂点まで行く n ステップの道のりの数になる. たとえば, M^2 の 1, 3 成分が 1 なので, A から C まで 2 ステップで行けることが分かる.

さらに, M が冪零行列なら, G が循環を含めないことも分かる.

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

空間図形

幾何ベクトル　空間の二つの線分 $\vec{AB}$ と $\vec{CD}$ の向きと長さが同じときに, その二つが幾何ベクトルとして等価であるといい, $\vec{AB} = \vec{CD}$ と書く. 線分を書かずに, 幾何ベクトルを名前で指すこともできる $\mathbf{a} = \vec{AB}$. 長さ 0 のベクトル $\mathbf{o} = \vec{AA}$ は向きを持たず, 零ベクトルという.

幾何ベクトルの和と差　二つの幾何ベクトルが $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ と表せたとき, その和が $\vec{AC}$ になる. 同様に $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$. 特に $-\vec{AB} = \vec{AA} - \vec{AB} = \vec{BA}$, 同じ長さで向きが逆のベクトル.

幾何ベクトルの実数倍　ベクトル $\mathbf{a}$ と同じ向きで長さが k 倍 (k は正の実数) の幾何ベクトルを $k\mathbf{a}$ と書く. 特に $0\mathbf{a} = \mathbf{o}$. また, 負の実数に関して, $(-k)\vec{AB} = k(-\vec{AB}) = k\vec{BA}$.

幾何ベクトルの性質　幾何ベクトルは数ベクトルと同じ性質を持っている．特に和の性質・スカラー倍の性質・分配率がそのまま利用できる．

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \quad \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} \quad \mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$$
$$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b} \quad (k+l)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+l\mathbf{a} \quad (kl)\mathbf{a}=k(l\mathbf{a}) \quad 1\mathbf{a}=\mathbf{a} \quad 0\mathbf{a}=\mathbf{o}$$

ベクトルの並行　零でない二つのベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b}$ が並行であることは, $\mathbf{a}=k\mathbf{b}$ となるような k が存在することと等価である．

位置ベクトル　基点 O を定めると, 任意の点 A をベクトル $\vec{OA}$ として表すことができる．逆に「点 $\mathbf{a}$」という表現は位置ベクトル $\mathbf{a}$ が定める点を指す．

例 (内分点・外分点)　2 点 $\mathbf{a},\mathbf{a}$ に対して, $\mathbf{a}$ から $\mathbf{b}$ に至る線分を $m:n$ の比に

(i) 内分する点の位置ベクトルは $\dfrac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{m+n}$,

(ii) 外分する点の位置ベクトルは $\dfrac{m\mathbf{b}-n\mathbf{a}}{m-n}$ (ただし $m\neq n$).

問　3 角形 ABC の辺 AB, AC を $m:n$ に内分する点をそれぞれ M, N とするとき, MN と BC が並行であることを示せ．

線形結合　n 個の幾何ベクトル $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ が与えられた時, あるベクトル $\mathbf{b}$ が $\mathbf{b}=x_1\mathbf{a}_1+\ldots+x_n\mathbf{a}_n$ として表現できたとき, $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ の線形結合だと言う．

基底　n 個の幾何ベクトル $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ について, 任意の幾何ベクトル $\mathbf{a}$ が $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ の線形結合で, かつ全ての i について $\mathbf{e}_i$ が $\mathbf{e}_i$ 以外の $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ の線形結合でなければ, $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ は**基底**である．$n=2$ のときは平面の基底, $n=3$ のとおきは空間の基底という．

$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+\ldots+a_n\mathbf{e}_n$$

から得られた $(a_1,\ldots,a_n)$ を $\mathbf{a}$ の**成分**という．$\mathbf{a}$ とその各成分から作った列ベクトルを同一視できる．

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

定理 1 (成分の一意性) もしも $\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+\ldots+a_n\mathbf{e}_n$ かつ $\mathbf{a}=a'_1\mathbf{e}_1+\ldots+a'_n\mathbf{e}_n$ ならば, $a_i=a'_i$ $(i=1,\ldots,n)$.

証明 簡単のために, $a_1\neq a'_1$ と仮定する．和と実数倍の性質から, $(a_1-a'_1)\mathbf{e}_1=(a_2-a'_2)\mathbf{e}_2+\ldots+(a_n-a'_n)\mathbf{e}_n$ となるので,

$$\mathbf{e}_1=\frac{1}{a_1-a'_1}\left[(a_2-a'_2)\mathbf{e}_2+\ldots+(a_n-a'_n)\mathbf{e}_n\right]$$

これが基底の定義と矛盾するので, 全ての成分が同じでなければならない．

数ベクトルの性質　上記の幾何ベクトルの性質を使えば, 幾何ベクトルの演算が数ベクトル上でもできることが分かる．

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, k\in\mathbf{R} \text{ ならば } \mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}, k\mathbf{a}=\begin{bmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$