余因子と余因子行列

Jacques Garrigue, 2014 年 7 月 11 日

総和 有限集合 S に対する関数 $f(x)$ の総和を $\sum_{x\in S} f(x)$ と書く. S の元の数が n で, $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ とすると,

$$\sum_{x\in S} f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(a_k)$$

逆に

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} f(k)$$

余行列 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ に対して, i 行目と j 列目を除いた行列を A_{ij} と書く.

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ \hline a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{array}\right]$$

余因子展開 列ベクトル分割 $A = [a_{ij}] = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ を考える.

各単位列ベクトル $\vec{e}_k = [\delta_{ik}]$ を使って, $\vec{a}_j$ を成分ごとに分けられる.

$$\vec{a}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \dots + a_{nj}\vec{e}_n$$

行列式の分配定理より,

$$|A| = \left|\ \vec{a}_1 \dots a_{1j}\vec{e}_1 \dots \vec{a}_n\ \right| + \left|\ \vec{a}_1 \dots a_{2j}\vec{e}_2 \dots \vec{a}_n\ \right| + \dots + \left|\ \vec{a}_1 \dots a_{nj}\vec{e}_n \dots \vec{a}_n\ \right|$$

さらに, 列と行の置換を行うと,

$$\left|\ \vec{a}_1 \dots a_{ij}\vec{e}_i \dots \vec{a}_n\ \right| = (-1)^{j-1}\left|\ a_{ij}\vec{e}_i\ \vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\ \right| = (-1)^{i+j-2}\left|\begin{array}{c|c} a_{ij} & a_{i1} \dots a_{in} \\ \hline O & A_{ij} \end{array}\right| = (-1)^{i+j} a_{ij}|A_{ij}|$$

まとめると, j **列目に対する余因子展開**が得られる.

$$|A| = (-1)^{1+j} a_{1j}|A_{1j}| + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj}|A_{nj}|$$

同様に, i **行目に対する余因子展開**が得られる.

$$|A| = (-1)^{i+1} a_{i1}|A_{i1}| + \dots + (-1)^{i+n} a_{in}|A_{in}|$$

行列式の再帰的な定義 A を n 次正方行列とする. 行列式 $\det_n(A)$ を以下の漸化式によって定義できる.

$$\begin{cases} \det_1[a] &= a \\ \det_{k+1}[a_{ij}] &= (-1)^0 a_{11}\det_k(A_{11}) + \dots + (-1)^k a_{(k+1)1}\det_k(A_{(k+1)1}) \end{cases}$$

例　$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ を余因子展開で計算せよ.

余因子　$A = [a_{ij}]$ とする. a_{ij} に対する余因子は $a^*_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ と定める.

余因子行列　各成分の余因子を集めた行列を余因子行列 $\tilde{A} = [a^*_{ij}]$ と定める.

定理 1 正方行列 A の余因子行列を $\tilde{A}$ とすると

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E$$

定理 2 A が正則行列であると $\det(A) =\neq 0$ は同値. また $\det(A) \neq 0$ ならば

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

系 2.1 A, B が正方行列で $AB = E$ ならば, B は A の逆行列.

例　$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ の余因子行列と逆行列を計算せよ.