

述語論理と帰納法

1 述語論理

前回見た命題論理は、推論の概念を捉えているが、具体的な対象に対して議論することができない。我々が一般的に使う論理はその拡張である述語論理になる。

論理式 論理式は以下の結合子から定義される。

t	::=	x	項変数
		c	項定数
		$f(t_1, \dots, t_n)$	項関数
A, B	::=	\dots	命題
		$p(t_1, \dots, t_n)$	述語
		$\forall x.A$	全称
		$\exists x.A$	存在
		$t_1 = t_2$	等価性

導出規則 命題論理の導出規則に以下の規則を加える。

\forall 導入	$\frac{\Delta \vdash A \quad x \notin fv(\Delta)}{\Delta \vdash \forall x.A}$	\exists 導入	$\frac{\Delta \vdash [t/x]A}{\Delta \vdash \exists x.A}$
\forall 除去	$\frac{\Delta \vdash \forall x.A}{\Delta \vdash [t/x]A}$	\exists 除去	$\frac{\Delta \vdash \exists x.A \quad \Delta, A \vdash B}{\Delta \vdash B}$
反射率	$\Delta \vdash t = t$	代入	$\frac{\Delta \vdash [t_1/x]A \quad \Delta \vdash t_1 = t_2}{\Delta \vdash [t_2/x]A}$

ここで自由変数 $fv(A)$ と代入が利用される。

$$\begin{aligned}
 fv(x) &= \{x\} & fv(c) &= \emptyset & fv(f(t_1, \dots, t_n)) &= \bigcup fv(t_i) \\
 fv(True) &= fv(False) = fv(X) = \emptyset & & & fv(p(t_1, \dots, t_n)) &= \bigcup fv(t_i) \\
 fv(A \supset B) &= fv(A \wedge B) = fv(A \vee B) = fv(A) \cup fv(B) & & & & \\
 fv(\forall x.A) &= fv(\exists x.A) = fv(A) \setminus \{x\} & & & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [t/x]x &= t & [t/x]y &= y \\
 [t/x]c &= c & [t/x]f(t_1, \dots, t_n) &= f([t/x]t_1, \dots, [t/x]t_n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [t/x]True &= True & [t/x]False &= False & [t/x]X &= X \\
 [t/x](A \supset B) &= [t/x]A \supset [t/x]B & & & & \wedge, \vee \text{も同様} \\
 [t/x]p(t_1, \dots, t_n) &= p([t/x]t_1, \dots, [t/x]t_n) & & & & \\
 [t/x]\forall y.A &= \forall y.[t/x]A \quad (y \notin fv(t)) & & & [t/x]\forall x.A &= \forall x.A \\
 [t/x]\exists y.A &= \exists y.[t/x]A \quad (y \notin fv(t)) & & & [t/x]\exists x.A &= \exists x.A
 \end{aligned}$$

導出の例

$$\frac{\frac{\forall x.human(x) \supset mortal(x) \vdash \forall x.human(x) \supset mortal(x)}{\forall x.human(x) \supset mortal(x) \vdash human(S) \supset mortal(S)} \quad human(S) \vdash human(S)}{\forall x.human(x) \supset mortal(x), human(S) \vdash mortal(S)}$$

Coq との対応 Coq では項は Set に属する型、命題は Prop にそれぞれ入るが、扱いは同じである。

抽象と適用はあらゆる種類のものに対してできる。

抽象	$\frac{\Gamma, X : S \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash \forall X : S, \tau : \text{Type}}{\Gamma \vdash \text{fun } X : S \Rightarrow M : \forall X : S, \tau}$	適用	$\frac{\Gamma \vdash M : \forall X : S, \tau \quad \Gamma \vdash A : S}{\Gamma \vdash M A : [A/X]\tau}$
$\Gamma \vdash \text{Set} : \text{Type}$	$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Set}}{\Gamma \vdash A : \text{Type}}$	$\frac{\Gamma \vdash A : S \quad \Gamma, X : A \vdash B : \text{Set}}{\Gamma \vdash \forall X : A, B : \text{Set}}$	$S \in \{\text{Set}, \text{Prop}\}$
$\Gamma \vdash \text{Prop} : \text{Type}$	$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Prop}}{\Gamma \vdash A : \text{Type}}$	$\frac{\Gamma \vdash A : S \quad \Gamma, X : A \vdash B : \text{Prop}}{\Gamma \vdash \forall X : A, B : \text{Prop}}$	$S \in \{\text{Set}, \text{Prop}\}$

この抽象と適用は普通の関数の抽象と適用の代わりに使える。そもそも $A \rightarrow B$ は $\forall X : A, B$ の略記法でしかない。

上の導出の例は適用 2 回でできる。

Section Socrates.

Variable A : Set.

Variables human mortal : A -> Prop.

Variable socrates : A.

Hypothesis hm : forall x, human x -> mortal x.

Hypothesis hs : human socrates.

Theorem ms : mortal socrates.

Proof.

 apply hm.

 assumption.

Qed.

Print ms.

ms = hm socrates hs

: mortal socrates

End Socrates.

\forall と \exists の間に De Morgan の法則がなりたつ。前回と同様に、 \exists を導出しようとしたときに `classic` を使わなければならない。

Section Laws.

Variables (A:Set) (P Q:A->Prop).

Lemma DeMorgan2 : (~ exists x, P x) -> forall x, ~ P x.

Proof.

 intros N x Px.

 apply N.

 exists x.

 apply Px.

Qed.

```
Theorem exists_or : (exists x, P x  $\vee$  Q x) -> (ex P)  $\vee$  (ex Q).
Proof.
  intros H.
  destruct H as [x [p|q]].
  left. exists x. assumption.
  right. exists x. assumption.
Qed.
```

(* 中まで破壊 *)

```
Hypothesis classic : forall P,  $\sim\sim$ P -> P.
```

```
Lemma DeMorgan2' : ( $\sim$  forall x, P x) -> exists x,  $\sim$  P x.
```

```
Proof.
  intros np.
  apply classic.
  intros nen.
  apply np; clear np.
  intros a; apply classic.
  intros np.
  apply nen.
  exists a; assumption.
Qed.
```

End Negation.

練習問題 1.1 以下の定理を *Coq* で証明せよ.

```
Section Coq3.
  Variable A : Set.
  Variable R : A -> A -> Prop.
  Variables P Q : A -> Prop.

  Theorem exists_postpone :
    (exists x, forall y, R x y) -> (forall y, exists x, R x y).
  Theorem or_exists : (ex P)  $\vee$  (ex Q) -> exists x, P x  $\vee$  Q x.

  Hypothesis classic : forall P,  $\sim\sim$ P -> P.
  Theorem remove_c : forall (P:A->Prop) (Q:A->Prop) (a : A),
    (forall x y, Q x = Q y) ->
    (forall c, ((exists x, P x) -> P c) -> Q c) -> Q a.
End Coq3.
```

2 帰納法

Coq でデータ型を定義すると、自動的に帰納法の原理が生成される.

```
Inductive nat : Set := 0 : nat | S : nat -> nat.
nat is defined
nat_rect is defined
nat_ind is defined
nat_rec is defined
```

```
Check nat_ind.
nat_ind
  : forall P : nat -> Prop,
    P 0 ->
    (forall n : nat, P n -> P (S n)) ->
    forall n : nat, P n
```

もっと分かりやすく書くと, `nat_ind` の型は $\forall P, P\ 0 \rightarrow (\forall n, P\ n \rightarrow P\ (S\ n)) \rightarrow (\forall n, P\ n)$ である. 即ち P は 0 でなりたち, 任意の n について P が n でなりたてば, $n+1$ でもなりたつことが証明できれば, 任意の n について P がなりたつ.

ちなみに, `nat_rec` の定義を見ると,

```
Check nat_rec.
nat_rec
  : forall P : nat -> Set,
    P 0 ->
    (forall n : nat, P n -> P (S n)) ->
    forall n : nat, P n
```

P が `Prop` ではなく `Set` を返すこと以外, 全く同じである.

本当の定義を見ると,

```
Print nat_rect.
nat_rect =
fun (P : nat -> Type) (f : P 0) (f0 : forall n : nat, P n -> P (S n)) =>
fix F (n : nat) : P n :=
  match n as n0 return (P n0) with
  | 0 => f
  | S n0 => f0 n0 (F n0)
end
```

実は普通の再帰関数同様, `fix` と `match` を使って定義されている.

```
Reset nat.
```

```
Definition plus : nat -> nat -> nat.
```

```
  intros m n.
```

```
  induction m.
```

```
    exact n.
```

(* nを返す *)

```
    exact (S IHm).
```

(* 帰納法によって得られた IHm の後者を返す *)

```
Defined.
```

(* 計算を可能にするために Defined で閉じる *)

```
Print plus.
```

```
plus =
```

```
fun m n : nat => nat_rec (fun _ : nat => nat) n (fun _ IHm : nat => S IHm) m
```

```
Eval compute in plus 2 3.
```

```
  = 5
```

```
Lemma plus_assoc : forall m n p, plus m (plus n p) = plus (plus m n) p.
```

```
Proof.
```

```
  intros m n p.
```

```
  induction m.
```

```
    simpl.
```

(* 計算する *)

```
    SearchPattern (?X = ?X).
```

(* 反射率を調べる *)

```
  refl_equal: forall (A : Type) (x : A), x = x
```

```
    apply refl_equal.
```

```
    simpl.
```

```
    rewrite IHm.
```

(* 代入を行う *)

```
    reflexivity.
```

(* apply refl_equal と同じ *)

```
Qed.
```

練習問題 2.1 以下の定理を証明せよ.

```
Theorem plus_0 : forall n, plus n 0 = n.
```

```
Theorem plus_m_Sn : forall m n, plus m (S n) = S (plus m n).
```

```
Theorem plus_comm : forall m n, plus m n = plus n m.
```