計算の論理学

Jacques Garrigue
名古屋大学多元数理科学研究科
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~garrigue/

計算とは何か（1930年頃）

人間が規則に基づいて進める作業

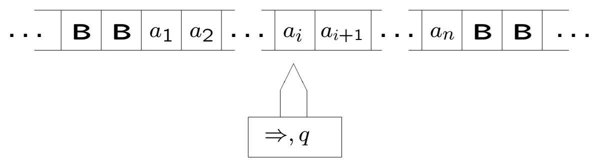
- 規則の適用は頭の中で行う
- 一度に確実に頭に収まるデータの量は有限
- 補助記憶としてノートと鉛筆を使う
- 1ページに書く分量は有限
- ノートの枚数を無限としてもよい

Alan Turingが考えた機械

少し単純化すると、以下のような機械で人間のできる計算が全てできるはず

- ノートの代わりに両端が無限なテープを使う
  - テープは記号が一つだけ書いてある四角の列からできている
  - テープに書ける記号の種類は有限である
- 「頭」はテープのある四角を見て、以下の動作を行う
  - 自分の状態と目の前の記号を元に動作を決定的に決める
  - 同じ位置に新しい記号を書く
  - 右か左に1四角分移動する

チューリング機械



チューリング機械の形式的な定義

定義 1 チューリング機械は次の5つ組によって定義される。

$$M = (K, \Sigma, \delta, q_0, H)$$

K: 空でない有限集合。Kの要素を状態という。

Σ: 空でない有限集合(アルファベット)。Σの元を記号という。Σは空白記号Bを含む。

q_0: Kの要素で、初期状態という。

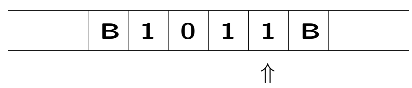
H: Kの部分集合で、その要素を停止状態という。

δ: $(K \setminus H) \times \Sigma \to \Sigma \times \{$左$,$右$\} \times K$なる遷移関数。

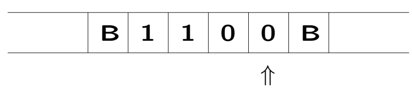
1を足すチューリング機械

2進数で表現された数字に1を足す機械

初期状態は下記の通り $\overline{1011}^2 = 2^3 + 2^1 + 2^0 = 11$



終了時はこうなる $\overline{1100}^2 = 12$



1を足すチューリング機械の定義

$\Sigma = \{B, 0, 1\}$

$K = \{Add, Right, Halt\}$, $q_0 = Add$, $F = \{Halt\}$

$$\delta = \begin{array}{c|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline Add & (1, 右, Right) & (0, 左, Add) & (1, 右, Right) \\ \hline Right & (0, 右, Right) & (1, 右, Right) & (B, 左, Halt) \end{array}$$

- 1のときはそれを0に変えて繰り上がり
- 0が見つかるまで左に移動しながら繰り返す
- 見つかったら、1に変えて右に戻る

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	0	1	1	B	

⇑
Add

$$\delta = \begin{array}{c|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline Add & (1, 右, Right) & (0, 左, Add) & (1, 右, Right) \\ \hline Right & (0, 右, Right) & (1, 右, Right) & (B, 左, Halt) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	0	1	0	B	

⇐
Add

$$\delta = \begin{array}{c|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline Add & (1, 右, Right) & (0, 左, Add) & (1, 右, Right) \\ \hline Right & (0, 右, Right) & (1, 右, Right) & (B, 左, Halt) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	0	1	1	B	

⇑
Add

$$\delta = \begin{array}{c|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline Add & (1, 右, Right) & (0, 左, Add) & (1, 右, Right) \\ \hline Right & (0, 右, Right) & (1, 右, Right) & (B, 左, Halt) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	0	0	0	B	

⇐
Add

$$\delta = \begin{array}{c|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline Add & (1, 右, Right) & (0, 左, Add) & (1, 右, Right) \\ \hline Right & (0, 右, Right) & (1, 右, Right) & (B, 左, Halt) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	0	1	1	B	

⇑
Add

$$\delta = \begin{array}{c|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline Add & (1, 右, Right) & (0, 左, Add) & (1, 右, Right) \\ \hline Right & (0, 右, Right) & (1, 右, Right) & (B, 左, Halt) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	1	0	0	B	

⇒

Right

$$\delta = \begin{array}{l|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline \mathit{Add} & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (0,\text{左},\mathit{Add}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) \\ \hline \mathit{Right} & (0,\text{右},\mathit{Right}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (B,\text{左},\mathit{Halt}) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	1	0	0	B	

⇑

Right

$$\delta = \begin{array}{l|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline \mathit{Add} & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (0,\text{左},\mathit{Add}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) \\ \hline \mathit{Right} & (0,\text{右},\mathit{Right}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (B,\text{左},\mathit{Halt}) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	1	0	0	B	

⇑

Right

$$\delta = \begin{array}{l|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline \mathit{Add} & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (0,\text{左},\mathit{Add}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) \\ \hline \mathit{Right} & (0,\text{右},\mathit{Right}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (B,\text{左},\mathit{Halt}) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	1	0	0	B	

⇑

Right

$$\delta = \begin{array}{l|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline \mathit{Add} & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (0,\text{左},\mathit{Add}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) \\ \hline \mathit{Right} & (0,\text{右},\mathit{Right}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (B,\text{左},\mathit{Halt}) \end{array}$$

1を足すチューリング機械の動き

	B	1	1	0	0	B	

⇑

Halt

$$\delta = \begin{array}{l|c|c|c} q\backslash a & 0 & 1 & B \\ \hline \mathit{Add} & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (0,\text{左},\mathit{Add}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) \\ \hline \mathit{Right} & (0,\text{右},\mathit{Right}) & (1,\text{右},\mathit{Right}) & (B,\text{左},\mathit{Halt}) \end{array}$$

足し算を行う機械

2進数で表現された二つの数字を足す

初期状態は下記の通り

B	1	1	I_0	M	1	0	B

⇑

終了時はこうなる

B	1	0	1	M	B	B	B

⇑