述語論理と ε 論法

Jacques Garrigue, 2008 年 5 月 27 日

1 述語論理

論理には二つの役割がる．一つは曖昧性のない言葉を与える．もう一つは理論的な解釈を使い，その言葉の厳密な意味を与える．後者はそれだけで一つの学問なので，ここでは前者だけについて言及する．

1.1 述語論理の構文と意味

少し単純化すると，述語論理では変数・定数と述語を元に論理式を作る

$x, y, z, \ldots$	変数
$1.5, \pi, \sqrt{2}$	定数
$A, B(x), C(y, z)$	述語

定数は具体的な対象 (数値など) を表す.
変数は実数や整数などの対象を抽象的に表す.
述語は変数の値によって，真か偽になる基本的な論理式である．例えば「$x^2 = 2$」や「$|x - 2| < 3$」は述語になる．特別な述語として，T(真) と F(偽) がある．

述語を組み合わせて，もっと複雑な論理式を作る．P と Q が論理式なら，以下も論理式である．

$P \wedge Q$	論理積	P と Q 両方が真のときに真
$P \vee Q$	論理和	P と Q のどちらかが真のときに真 (両方が真でもいい)
$P \Rightarrow Q$	含意	P ならば Q. P が真のときに Q も真なら，真
$\neg P$	否定	P が真なら偽，偽なら真

変数を導入する論理式もある．

$\forall x, P$	全称	任意の x について P が真なら，真
$\exists x, P$	存在	ある x について P が真なら，真

「任意の x」とは,「全ての x の可能な値」という意味でもいい.

1.2 論理式の解釈と法則

論理式の意味をさらに厳密に定義するために，論理積・論理和・含意・否定について真偽の表を与える．

$P \wedge Q$	T	F
T	T	F
F	F	F

$P \vee Q$	T	F
T	T	T
F	T	F

$P \Rightarrow Q$	$Q =$ T	$Q =$ F
$P =$ T	T	F
$P =$ F	T	T

P	$\neg P$
T	F
F	T

論理和，含意，否定の関係　上記の表をよく見ると，論理和の表で P の行を交換すると含意の表になる．否定は真と偽を交換するので，任意の論理式 P と Q について，以下の論理式が等しい．

$$(P \Rightarrow Q) = (\neg P \vee Q) \qquad \neg P = (P \Rightarrow \mathsf{F})$$

これを見ると，含意と否定のどちらかを削除しても，全ての論理式が書けることが分かる．含意は否定と論理和に翻訳できるし，否定は含意に翻訳できる．

ド・モルガンの法則　否定と他の記号の間に以下の関係が成り立つ．

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q \qquad \neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q \qquad \neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q \qquad \neg(\neg P) = P$$

$$\neg(\forall x, P) = \exists x, \neg P \qquad \neg(\exists x, P) = \forall x, \neg P$$

このド・モルガンの法則を使うと，論理式の否定を機械的に得ることができる．

2　ε 論法

ε 論法は「$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$」のような文章に厳密な意味を与える．述語論理を使うと，それが短く書ける．

数列の極限　数列 $\{a_n\}$ が極限 α へ収束するというのは，以下の式で定義できる．

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

ここでは，ϵ が 0 より大きい実数で，N と n は自然数である．

数列の収束　極限を指定しないで収束だけを求めるなら，以下の式になる．

$$\exists \alpha, \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

逆に，数列が収束しないことはド・モルガンの法則によって簡単に得られる．

$$\forall a, \exists \epsilon > 0, \forall N, \exists n, n > N \wedge |a_n - \alpha| \geq \epsilon$$

数列の発散　この場合では，εではなく，任意に大きくできる A を使う．

$$\forall A, \exists N, \forall n, n > N \Rightarrow a_n > A$$

コーシー列　数列の任意の元の差が 0 に収束する列をコーシー列と呼ぶ厳密には以下の式になる．

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, \forall n, (m > N \wedge n > N) \Rightarrow |a_n - a_m| < \epsilon$$

コーシー列は収束する．

関数の極限　関数 $f(x)$ が a で極限 α に収束することは，ε-δ 論法を使うと以下の式になる．

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \epsilon$$

関数の連続性　この場合では $x = a$ を除外しなければ十分．

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

練習問題1.1〜1.4の解答

問題 1.1.2　次の数列は有界で単調増加であることを示し，極限を求めよ．

(1) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$　　　(2) $a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = \dfrac{3a_n + 4}{2a_n + 3}$

解答　$\{a_n\}$ が単調増加で，極限 α を持つと仮定すると，任意の n について $a_1 \le a_n \le \alpha$．それを考えると，

1. $a_n \in [a_0, \alpha]$ ならば $a_{n+1} \in [a_0, \alpha]$
2. $a_n \in [a_0, \alpha)$ ならば $a_{n+1} > a_n$
3. $a_n = \alpha$ ならば $a_{n+1} = \alpha$

が分かれば，$\{a_n\}$ が単調増加で，α がその上界で，極限になることが分かる．厳密にはさらに α 意外に可能な極限がないことを確認しなければならない．

(1)　$f(x) = \sqrt{x+1}$ とおくと，$a_{n+1} = f(a_n)$．

もしも $\{a_n\}$ が収束すれば，その極限を α とする．$f(x)$ は連続なので，$f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$．まず，$x = \sqrt{x+1}$ をとき，可能な α を求める．

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$\alpha > a_1 = 1$ なので，可能な極限は $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．

次に $f(x)$ が $[1, \alpha]$ で単調増加することを確認する．$-1 \le x < y$ を仮定するだけで $f(x) = \sqrt{x+1} < \sqrt{y+1} = f(y)$ が確認できるので，$f(x)$ は単調増加である．

$f(x)$ が単調増加であることを使うと $a_0 \le a_n \le \alpha \Rightarrow f(a_0) \le f(a_n) \le f(\alpha)$ が分かり，さらに $f(a_0) = \sqrt{2} > 1 = a_0$ および $f(\alpha) = \alpha$ から $a_0 \le a_n \le \alpha \Rightarrow a_0 \le a_{n+1} \le \alpha$ が成り立ち，帰納法により $\{a_n\}$ は有界である．

次に $\{a_n\}$ が単調増加であることを証明する．帰納法をを使う．まず，上で見たように，$a_1 > a_0$．任意の n について，$a_{n+1} > a_n$ を仮定すると $a_{n+2} = f(a_{n+1}) > f(a_n) = a_{n+1}$．

$\{a_n\}$ は単調増加で有界なので，極限を持ち，$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$．

(2)　$f(x) = \dfrac{3x+4}{2x+3}$ とおくと，$a_{n+1} = f(a_n)$．$f(x)$ は $(-\frac{3}{2}, \infty]$ で 連続なので，(1) と同様にまず $x = f(x)$ の解を求める．

$$x = \frac{3x+4}{2x+3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$\alpha > a_1 = 1$ なので，可能な極限は $\sqrt{2}$ である．

次に $f(x)$ が $[1, \sqrt{2}]$ で単調増加であることを確認する．

$$f(y) - f(x) = \frac{3y+4}{2y+3} - \frac{3x+4}{2x+3} = \frac{6yx + 9y + 8x + 12 - 6xy - 9x - 8y - 12}{(2y+3)(2x+3)} = \frac{y - x}{(2y+3)(2x+3)}$$

$-\frac{3}{2} < x < y$ ならば，$y - x > 0$ と $(2y+3)(2x+3) > 0$ が分かるので，単調である．

$a_1 = \frac{7}{5} > 1 = a_0$ から，(1) と同様に $\{a_n\}$ は単調増加で有界であり，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

問題 1.1.5　有理数と無限少数について

解答 (1)　$\sqrt{2}$ が有理数なら，互いに素な p と q が存在し，$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. 定義から $2q^2 = p^2$ が分かり，$p = 2p'$ になるような p' が存在する．両辺を 2 で割ると $q^2 = 2p'^2$ になり，q も 2 で割れなければならないが，元の仮定と矛盾するので，$\sqrt{2}$ が有理数ではない．

(4)　以下の二つの関数 $\lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil$ を定義する．

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbf{Z} \mid n \le x\} \quad x \text{ 以下の最大の整数}$$
$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbf{Z} \mid x \le n\} \quad x \text{ 以上の最小の整数}$$

定義から，$\lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil$ で，$0 \le \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \le 1$.

任意の実数 α について $a_n = \dfrac{\lfloor \alpha \cdot 10^n \rfloor}{10^n}$ と $b_n = \dfrac{\lceil \alpha \cdot 10^n \rceil}{10^n}$ を定義する．定義より，$\{a_n\}$ は単調増加で，$\{b_n\}$ は単調減少でなので，$\{b_n - a_n\}$ は単調減少である．さらに，$0 \le \alpha - a_n \le b_n - a_n \le 10^{-n}$. もしもある N で $b_N - a_N = 0$ ならば，単調性から任意の $n > N$ について $a_n = b_n = \alpha = a_N$ が分かる．この場合では α は有限少数になる．もしもそういう N が存在しなければ (即ち $\forall n, a_n < b_n$)，α は無限少数になる．

(5)　(4) の $\{a_n\}$ は有理数列で $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$

問題 1.2.4　$f(x)$ が区間 I で連続ならば，$|f(x)|$ も I で連続であることを示せ．

解答　任意の $a \in I$ について連続性を示す．

$$x \to a \quad \text{のとき} \quad ||f(x)| - |f(a)|| \le |f(x) - f(a)| \to 0$$

以上より，$\lim_{x\to a} |f(x)| = |f(a)|$.

問題 1.3.2　つぎの方程式を解け

(1) $\mathrm{Cos}^{-1} x = \mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{5}$　　(2) $\mathrm{Cos}^{-1} x = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{3} + \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{7}{9}$

解答 (1)　$\mathrm{Cos}^{-1} x = \theta$ とおく．Tan^{-1} の結果でもあるので，$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$. $\sin^2\theta = \cos^2\theta \cdot \tan^2\theta$ と $\tan\theta = \sqrt{5}$ から

$$1 - x^2 = 5x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 6x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(2)　両辺に cos をかける．

$$\begin{aligned} x = \ & \cos(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{3} + \mathrm{Sin}^{-1}\frac{7}{9}) = \cos(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{3})\cos(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{7}{9}) - \sin(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1}{3})\sin(\mathrm{Sin}^{-1}\frac{7}{9}) \\ = \ & \sqrt{1 - \frac{1}{9}}\sqrt{1 - \frac{49}{81}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{9} = \sqrt{\frac{8}{9}\cdot\frac{32}{81}} - \frac{7}{27} = \frac{16}{27} - \frac{7}{27} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

問題 1.4.2　数列 $\{a_n\}$ が ∞ で発散することを ϵ 論法で定義せよ．

解答　裏面にある．

問題 1.4.3　$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{1 + 2 + \ldots + n} = \alpha$ を示せ．

解答　$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n, n > N \Rightarrow |\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{1 + \ldots + n} - \alpha| < \epsilon$ を証明しなければならない．

ϵ を与えられた．$\forall n, n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ になるような N が存在する．

$A = |a_1 - \alpha + 2(a_2 - \alpha) + \ldots + N(a_N - \alpha)|$ とおく．$N' = \max(N, \lceil 2\sqrt{\frac{A}{\epsilon}} \rceil)$ とすると，任意の $n > N'$ について，$1 + \ldots + n > \dfrac{N' \cdot N'}{2}$ なので，$\dfrac{A}{1 + \ldots + n} < \dfrac{\epsilon}{2}$.

そして，$\dfrac{(N+1)|a_{N+1} - \alpha| + \ldots + n|a_n - \alpha|}{1 + \ldots + n} < \dfrac{\epsilon}{2}$ なので，両方を足すと $|\dfrac{a_1 + \ldots + na_n}{1 + \ldots + n} - \alpha| < \epsilon$.

問題 1.1.5(2)(3), 1.1.6, 1.2.1, 1.2.2, 1.3.1　教科書 (略解) 参照