問題 5.3.1、5.3.2 の解答

Jacques Garrigue・源馬照明, 2009 年 1 月 19 日

$\cos^n x$ の積分

前回のレポートの回答では度々以下の不定積分に関する方程式を使っている ($n \geq 2$).

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \sin x \cos^n x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

証明は教科書の p65 参照．$n = 2$ のとき，倍角の方程式も使える.

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

問題 5.3.1

つぎの線積分の値を計算せよ.

(1). $\displaystyle\int_C x^2 dx + 2xydy, \quad C : (1,1)$ から $(-1,3)$ へ直線で結んだもの.
$C : x = t,\ y = -t + 2,$ 向き $t : 1 \to -1.$

$$\begin{aligned}
\int_C x^2 dx &= \int_1^{-1} t^2 dt = -2\int_0^1 t^2 dt = -\frac{2}{3}\left[t^3\right]_0^1 = -\frac{2}{3} \\
\int_C 2xydy &= \int_1^{-1} 2t(-t+2)(-1)dt = \int_{-1}^1 -2t^2 + 4tdt \\
&= 2\int_0^1 -2t^2 dt = -\frac{4}{3}\left[t^3\right]_0^1 = -\frac{4}{3} \\
\int_C x^2 dx + 2xydy &= -\frac{2}{3} + -\frac{4}{3} = -2
\end{aligned}$$

(2). $\displaystyle\int_C xydx + e^{x^2}dy, \quad C : y = x^2,$ 向き : $(0,0) \to (2,4).$
$C : x = t,\ y = t^2,$ 向き $t : 0 \to 2.$

$$\begin{aligned}
\int_C xydx &= \int_0^2 t^3 dt = \frac{1}{4}\left[t^4\right]_0^2 = 4 \\
\int_C e^{x^2} dy &= \int_0^2 2te^{t^2} dt = \int_0^4 e^t dt = e^4 - 1 \\
\int_C xydx + e^{x^2}dy &= 4 + e^4 - 1 = e^4 + 3
\end{aligned}$$

(3). $\displaystyle\int_C y^2 dx + x^2 dy, \quad C : x = \cos t,\ y = \sin t \quad (t : 0 \to \pi).$

$$\begin{aligned}
\int_C y^2 dx &= \int_0^\pi \sin^2 t(-\sin t)dt = -\int_0^\pi \sin^3 tdt \\
&= -\left[-\cos t \sin^2 t\right]_0^\pi + \int_0^\pi -\cos t \times 2\cos t \sin tdt \\
&= 2\int_0^\pi -\sin t \cos^2 tdt = 2\left[\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^\pi = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_C x^2 dy &= \int_0^\pi \cos^3 t dt \\
&= 0 \quad \text{(この積分区間で奇関数)} \\
\int_C y^2 dx + x^2 dy &= -\frac{4}{3} + 0 = -\frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

問題 5.3.2

つぎの線積分を重積分に帰着して計算せよ (C は単位円の周を時計の逆回りに 1 周したもの).

(1). $\int_C (e^x + y)dx + (y^4 + x^3)dy$

グリーンの定理を用いる. ただし D は単位円の内部.

$$P(x,y) = e^x + y \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1$$

$$Q(x,y) = y^4 + x^3 \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3x^2$$

$$\int_C (e^x + y)dx + (y^4 + x^3)dy = \iint_D \left(3x^2 - 1\right) dxdy$$

この重積分を極座標を用いて計算する. $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおく.
領域 $D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$.

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi \quad (*)$$

$$
\begin{aligned}
\iint_D \left(3x^2 - 1\right) dxdy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (3r^3\cos^2\theta - r)dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{4}r^4\cos^2\theta - \frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{2}d\theta \\
&= \frac{3}{4}\pi - \left[\frac{1}{2}\theta\right]_0^{2\pi} \quad \text{(*より)} \\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(2). $\int_C (y^3 - y)dx + (3y^2x - x)dy$

グリーンの定理を用いる.

$$P(x,y) = y^3 - y \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 1$$

$$Q(x,y) = 3y^2x - x \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 3y^2 - 1$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \text{ となるので } \int_C (y^3 - y)dx + (3y^2x - x)dy = 0$$