重積分

Jacques Garrigue, 2008 年 12 月 15 日

長方形の分割　長方形 $R = [a, b] \times [c, d]$ と両辺の分割 $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ と $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n$ から長方形の分割 $\Delta : \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ を作る．Δ の幅は $|\Delta| = \max(\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \le i \le m\} \cup \{y_j - y_{j-1} \mid 1 \le j \le n\})$.

リーマン和　各 $(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) \in R_{ij}$ になるように α と β を選ぶと以下の和を定義する．

$$S(f, \Delta, (\alpha, \beta)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\alpha_{ij}, \beta_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

重積分　Δ の幅が小さくならと (α, β) によらずに $S(f, \Delta, (\alpha, \beta))$ が極限をもったときに f が R で重積分可能だという．

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{|\Delta| \to 0} S(f, \Delta, (\alpha, \beta))$$

具体的には，$S^+(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$,

$S^-(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ とおくと，

$\lim_{\epsilon \to +0} \sup_{|\Delta| < \epsilon} S^+(f, \Delta) = \lim_{\epsilon \to +0} \inf_{|\Delta| < \epsilon} S^-(f, \Delta)$ であるときに f が R で重積分可能である．

有界集合での重積分　D が有界集合なら，$\tilde{D} = [\inf\{x \mid (x, y) \in D\}, \sup\{x \mid (x, y) \in D\}] \times [\inf\{y \mid (x, y) \in D\}, \sup\{y \mid (x, y) \in D\}]$ とすれば，$\tilde{D}$ は長方形で $D \subset \tilde{D}$．D で定義された $f(x, y)$ を以下のように $\tilde{D}$ に定義された $\tilde{f}(x, y)$ に拡張する．D における f の重積分は $\tilde{D}$ における $\tilde{f}$ の重積分として定義される．

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases} \qquad \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(x, y) dx dy$$

練習問題 4.4.5 と 4.4.6 の解答

問題 4.4.5(2)　$x^2 - xy + y^3 = 7$ における y の極値.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2x - y}{-x + 3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \ \Leftrightarrow \ f_x = 0 \ \Leftrightarrow \ 2x - y = 0 \ \Leftrightarrow \ y = 2x \ (3y^2 - x \ne 0)$$

$$x^2 - 2x^2 + 8x^3 = 7 \ \Leftrightarrow \ 8x^3 - x^2 - 7 = 0 \ \Leftrightarrow \ (x-1)(8x^2 + 7x + 7) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 1 \ \ (7^2 - 4 \times 8 \times 7 < 0)$$

極値の候補は $x = 1, y = 2$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(1, 2) = -\frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3} = -\frac{f_{xx}}{f_y} = -\frac{2}{11} < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(1) = 2 \text{ は極大値}$$

問題 4.4.6(1)　条件 $x^2+y^2=2$ の下で $f(x,y)=y-x$ の極値
$F(x,y,\lambda)=y-x-\lambda(x^2+y^2-2)$ とおくと，極値の前提条件が以下のようになる．

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=-1-2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=1-2\lambda y=0 \\ g(x,y)=x^2+y^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1/2\lambda \\ y=1/2\lambda \\ 1/4\lambda^2+1/4\lambda^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\pm 1/2 \\ y=\pm 1 \\ x=-y \end{cases}$$

$f_x(x,y)=-1 \qquad f_y(x,y)=1 \qquad g_x(x,y)=2x \qquad g_y(x,y)=2y$

$y\neq 0$ かつ $x^2+y^2=2$ のとき陰関数 $y=\varphi(x)$ が定義され $\varphi'(x)=-\dfrac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}=-\dfrac{x}{\varphi(x)}$

$\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=-1-\dfrac{x}{\varphi(x)}$

$\dfrac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=-\dfrac{\varphi(x)-x\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}=-\dfrac{\varphi(x)^2+x^2}{\varphi(x)^3}$

$(1,-1)$ では $\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=0,\ \dfrac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=2$ より極小値 $f(1,-1)=-2$

$(-1,1)$ では $\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=0,\ \dfrac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=-2$ より極大値 $f(-1,1)=2$

(2)　条件 $x^2+2y^2=1$ の下で $f(x,y)=xy$ の極値
$F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+2y^2-1)$ とおくと，極値の前提条件が以下のようになる．

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda)=y-2\lambda x=0 \\ F_y(x,y,\lambda)=x-4\lambda y=0 \\ g(x,y)=x^2+2y^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2\lambda x \\ x-8\lambda^2 x=0 \\ x^2+8\lambda^2x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2\lambda x \\ x=0 \vee \lambda=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ x^2(1+8\lambda^2)=1 \end{cases}$$

最後の方程式で $x=0$ が不可能なので $\lambda=\pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\ x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y=2\lambda x$

$f_x(x,y)=y \qquad f_y(x,y)=x \qquad g_x(x,y)=2x \qquad g_y(x,y)=4y$

$y\neq 0$ かつ $x^2+2y^2=2$ のとき陰関数 $y=\varphi(x)$ が定義され $\varphi'(x)=-\dfrac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))}=-\dfrac{x}{2\varphi(x)}$

$\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)=\varphi(x)-x\dfrac{x}{2\varphi(x)}=\varphi(x)-\dfrac{x^2}{2\varphi(x)}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))&=\varphi'(x)-\frac{2x}{2\varphi(x)}+\frac{x^2\varphi'(x)}{2\varphi(x)^2}=-\frac{x}{2\varphi(x)}(1+\frac{x^2}{2\varphi(x)^2})-\frac{x}{\varphi(x)}=-\frac{3x}{2\varphi(x)}-\frac{x^3}{4\varphi(x)^3}\\&=-\frac{x}{4\varphi(x)^3}(x^2+6\varphi(x)^2)\end{aligned}$$

全ての候補では $\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=0$

$(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2})$ では $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=-\sqrt{2}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{4})<0$ より極大値 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2})$ では $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=\sqrt{2}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{4})>0$ より極小値 $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2})$ では $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=\sqrt{2}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{4})>0$ より極小値 $f(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2})=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2})$ では $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x,\varphi(x))=-\sqrt{2}(\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{4})<0$ より極大値 $f(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$