偏微分と全微分

Jacques Garrigue, 2008 年 10 月 15・22 日

偏微分　関数 $x \mapsto f(x,b)$ が a で微分可能なら，$f(x,y)$ が (a,b) で x に関して偏微分可能だという．

偏微分係数は

$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

f が開領域 D の各点で x に対して偏微分可能なら，$z = f(x,y)$ の x に関する偏導関数が定義される．

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

全微分　関数 $f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であるとは，$(x,y) \to (a,b)$ のとき，次のような m, n が存在するときにいう．

$$f(x,y) = f(a,b) + m(x-a) + n(y-b) + o(|(x,y) - (a,b)|)$$

あるいは

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - (f(a,b) + m(x-a) + n(x-b))}{|(x,y) - (a,b)|} = 0$$

定理 1　$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能ならば，$f(x,y)$ は x, y 両方に関して (a,b) で偏微分可能で，

$$f_x(a,b) = b \qquad f_y(a,b) = b$$

証明　全微分の定義から

$$\lim_{x \to a\ y=b} \frac{f(x,y) - (f(a,b) + m(x-a))}{|x-a|} = 0$$

なので

$$\lim_{x \to a\ y=b} \frac{f(x,y) - f(a,b)}{x-a} = m$$

定理 2　$f(x,y)$ が (a,b) を含む開領域において，x, y 両方に関して偏微分可能であり，f_x, f_y が (a,b) で連続ならば，$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能である．

証明　$m = f_x(a,b), n = f_y(a,b)$ とおく．任意の $\epsilon > 0$ について，

$$\frac{|f(x,y) - (f(a,b) + m(x-a) + n(x-b))|}{|(x,y) - (a,b)|} < \epsilon$$

となるような (a,b) の近傍の存在を証明すればいい．

そのために，f_x, f_y の連続性を利用して，

$$\forall (x,y) \in B_r(a,b) \begin{cases} |f_x(x,y) - m| < \frac{\epsilon}{2} \\ |f_y(x,y) - n| < \frac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

となるような r を選ぶ．

簡単のため，$x > a,\ y > b$ を仮定する．平均値の定理より，ある $x_0 \in (a,x)$ と $y_0 \in (b,y)$ について，$f_y(a,y_0) = \dfrac{f(a,y) - f(a,b)}{y-b}$ および $f_x(x_0,y) = \dfrac{f(x,y) - f(a,y)}{x-a}$.

この等式より $f(x,y) = f(a,b) + f_y(a,y_0)(y-b) + f_x(x_0,y)(x-a)$ なので,

$$\frac{|f(x,y) - (f(a,b) + m(x-a) + n(y-b))|}{|(x,y)-(a,b)|} =$$
$$\frac{|(f_x(x_0,y)-n)(x-a) + (f_y(a,y_0)-m)(y-b)|}{|(x,y)-(a,b)|} < \frac{\epsilon}{2}\frac{|x-a|+|y-b|}{|(x-y)-(a,b)|} \leq \epsilon$$

定理 3 f が (a,b) で全微分可能ならば, f が (a,b) で連続である.

定理 4 関数 $z = f(x,y)$ が開領域 D で全微分可能で, 関数 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ が区間 I で微分可能で, $\forall t \in I, (\varphi(t),\psi(t)) \in D$ ならば, 合成関数 $z = f(\varphi(t),\psi(t))$ は I で微分可能である.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial x}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

証明 $x_0 = \varphi(t_0), y_0 = \psi(t_0), m = f_x(x_0,y_0), n = f_y(x_0,y_0)$ とおく.

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(\varphi(t),\psi(t)) - f(x_0,y_0)}{t-t_0} - m\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)-x_0}{t-t_0} - n\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)-y_0}{t-t_0} \qquad \text{後の 2 つは極限を持つ}$$
$$= \lim_{t\to t_0}\frac{f(\varphi(t),\psi(t)) - (f(x_0,y_0)) + m(\varphi(t)-x_0) + n(\psi(t)-y_0)}{t-t_0}$$
$$= \lim_{t\to t_0}\frac{|(\varphi(t),\psi(t)) - (x_0,y_0)|}{t-t_0}\cdot\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(\varphi(t),\psi(t)) - (f(x_0,y_0)) + m(x-x_0) + n(y-y_0))}{|(x,y)-(x_0,y_0)|}$$
$$= \lim_{t\to t_0}\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\cdot 0 = 0$$

定理 5 関数 $z = f(x,y)$ が開領域 D で全微分可能で, 関数 $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v)$ が開領域 E で偏微分可能で $\forall(u,v) \in E, (\varphi(u,v),\psi(u,v)) \in D$ ならば, 合成関数 $z = f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ は E で偏微分可能である.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

この関係を**連鎖律**という.

証明 定理**??**を u と v それぞれに対して適用する.

方向微分 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍で定義されているとする. あるベクター (u,v) について, もしも $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+uh,b+vh)}{h}$ が収束するなら, $f(x,y)$ が (u,v) 方向で微分可能であるという.

定理 6 $f(x,y)$ が点 (a,b) の近傍で全微分可能なら, 任意のベクター (u,v) について (u,v) 方向で微分可能である.

証明 $\varphi(t) = a+ut,\ \psi(t) = b+vt$ とおくと, 定理**??**より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+uh,b+vh)}{h} = uf_x(a,b) + vf_y(a,b)$$

例 $f(x,y) = r\sin 3\theta = \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2}$ は連続で, 任意の方向に微分可能だが, 全微分可能ではない.

連続性は極座標表現から自明である.

$u = r\cos\theta, v = r\sin\theta$ とくと, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(uh,vh)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{hr\sin 3\theta}{h} = r\sin 3\theta$ なので (u,v) 方向に微分可能である.

全微分可能なら, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(uh,vh)-f(0,0)}{h} = uf_x(0,0) + vf_y(0,0)$ だが, $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = -1$ なのに, $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(h\sqrt{3}/2,h/2)-f(0,0)}{h} = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ なので全微分可能ではない.

定理??より $f_x(x,y)$ が不連続である．それを確認する．

$$f_x(x,y)=\frac{6xy(x^2+y^2)-2x(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y=x} f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{8x^4}{(2x^2)^2}=2\neq 0=f_x(0,0)$$

問題 4.1.1〜4.1.4, 4.2.1, 4.2.4 の解答

問題 4.1.1

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to+0}\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}=\lim_{r\to+0} r\cos^2\theta\sin\theta=0$

(2) $\displaystyle \lim_{y=0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}=1 \qquad \lim_{x=0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}=-2$ 　　よって極限がない

(3) $\displaystyle \lim_{y=0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x=0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}=2$ 　　よって極限がない

(4) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+x^2y}{2x^2+y^2}=\lim_{r\to+0}\frac{r^3\cos^2\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2(1+\cos^2\theta)}=\lim_{r\to+0} r\frac{\cos^2\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{1+\cos^2\theta}=0$

(5) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{r\to+0}\frac{r^{3/2}\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}}{r}=\lim_{r\to+0}\sqrt{r}\cos\theta\sqrt{|\sin\theta|}=0$

(6) $\displaystyle \lim_{y=0}\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0 \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x=y^2}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}$ 　　よって極限がない

問題 4.1.2

教科書の略解参照．xz 平面の切り口とは，局面の $y=0$ 平面との交わりで，$z=f(x,0)$ のグラフである．同様に yz 平面の切り口は $z=f(0,y)$ のグラフである．

問題 4.1.3

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to+0}\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2}=0=f(0,0)$ 　　よって $f(x,y)$ は (0,0) で連続

(2) $\displaystyle \lim_{y=0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2+y2^2}=1 \qquad \lim_{x=0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2+2y^2}=\frac{1}{2}$ 　　よって極限がなく，$f(x,y)$ も不連続

(1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+x^2+y^2+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to+0}\frac{r^4\cos^4\theta+r^2+r^3\sin^3\theta}{r^2}$

$\displaystyle \qquad =1+\lim_{r\to+0} r(r\cos^4\theta+\sin^3\theta)=1=f(0,0)$

よって $f(x,y)$ は (0,0) で連続

問題 4.1.4 略解参照

問題 4.2.1

$\displaystyle \lim_{x\to 0}\lim_{y=x}\frac{2xy}{x^2+y^2}=1$ で，$f(0,0)=0$ なので，f は $(0,0)$ で連続ではない．

$\displaystyle f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{0/x^2-0}{x-0}=0$ なので，f は x に関して偏微分可能である．同様に y に関しても偏微分可能である．

f は $(0,0)$ で不連続なので，全微分可能ではありえない．

問題 4.2.4

(1) $\dfrac{d}{dt}xy^2 - x^2y = (y^2 - 2xy)\dfrac{d}{dt}t^2 + (2xy - x^2)\dfrac{d}{dt}e^t = (e^{2t} - 2t^2e^t)2t + (2t^2e^t - t^4)e^t$
$= 2e^{2t}(t + t^2) - e^t(4t^3 + t^4)$

(2) $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Tan}^{-1}xy = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}\dfrac{d}{dt}e^t + e^{-t} + \dfrac{x}{1 + x^2y^2}\dfrac{d}{dt}e^{2t} = e^{2t}\dfrac{e^t - e^{-t} + 2(e^t + e^{-t})}{1 + (e^t + e^{-t})^2e^{4t}}$
$= \dfrac{3e^{3t} + e^t}{1 + e^{6t} + 2e^{4t} + e^{2t}}$

(3) $\dfrac{d}{dt}e^{x^2y} = e^{x^2y}\left(2xy\dfrac{d}{dt}\cos t + x^2\dfrac{d}{dt}t^2\right) = e^{t^2\cos^2 t}(-2t^2\cos t\sin t + 2t\cos^2 t)$
$= 2t\cos t e^{t^2\cos^2 t}(\cos t - t\sin t)$

(4) $\dfrac{d}{dt}f(x, y) = f_x(x, y)\dfrac{d}{dt}\cos t + f_y(x, y)\dfrac{d}{dt}\sin t = -f_x(\cos t, \sin t)\sin t + f_y(\cos t, \sin t)\cos t$