多変数関数の連続性

Jacques Garrigue, 2008 年 10 月 6 日

n 次元空間での距離

n 次元の空間 $\mathbf{R}^n$ において，点の座標を $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ のように表現できる．

点 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と点 $Q(y_1, y_2, ..., y_n)$ の距離はそれぞれをベクトルとして見たときに，その差分ベクトルの長さである．

$$||P - Q|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

近傍と境界

$B(P, r)$ を P が中心の半径 r の球とする．具体的には

$$B(P, r) = \{Q \in \mathbf{R}^n \mid ||P - Q|| < r\}$$

$B(P, r)$ を P の **r-近傍**とよぶ．

$\mathbf{R}^n$ の部分集合に対して，以下のように P を分類できる．

- P が A の**内点** $\Leftrightarrow$ $\exists \epsilon > 0, B(P, \epsilon) \subset A$
- P が A の**外点** $\Leftrightarrow$ $\exists \epsilon > 0, B(P, \epsilon) \cap A = \emptyset$
- P が A の**境界点** $\Leftrightarrow$ P は A の内点でも外点でもない．

A の境界点全体を ∂A と書き，A の境界とよぶ．

開集合と閉集合

A が境界点を含まないとき $(A \cap \partial A = \emptyset)$，$A$ を**開集合**という．

逆に，A が全ての境界点を含むとき $(\partial A \subset A)$，A を**閉集合**という．

開領域

集合 A の任意の 2 点 P, Q が A 内の曲線で結べるときは，A が**連結**であるという．連結な開集合を**開領域**とよぶ．まとめると

$$D \text{ が開領域} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall P \in D, \exists \epsilon > 0, B(P, \epsilon) \subset D \\ \forall P, Q \in D, P \text{ と } Q \text{ を結ぶ曲線が } D \text{ 内にある} \end{cases}$$

点列の極限

$\mathbf{R}^n$ の無限な点列 $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots$ を $\{P_k\}$ と書く．

k を十分大くくするとき，P_k がある点 P に限りなく近付くとき，すなわち

$$\lim_{k \to \infty} ||P_k - P|| = 0$$

のとき，点列 $\{P_k\}$ は P に**収束**するという．

$$\lim_{k \to \infty} P_k = P$$

$\{P_k\}$ の全ての点がある閉集合 A に含まるならば，P も A に含まれる．しかし A が閉集合でないとき，そうとは限らない (境界点である可能性がある)．

多変数関数の極限

$\mathbf{R}^n$ 上の多変数関数 $f(Q)$ が開領域 A で定義され，D 内で P へ収束する任意の点列 $\{P_k\}$ について

$$\lim_{k \to \infty} f(P_k) = \alpha$$

ならば，f の P での極限が α だといい，以下のように書く．

$$\lim_{Q\in D\ Q\to P} f(Q) = \alpha$$

P が D の内点であるとき，P の収束する全ての点列がある時点から D に含まれるので，$Q \in D$ を省いてもいい．多変数関数の極限を $\epsilon - \delta$ 記法で書くと以下の式になる．

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall Q \in D \subset \{P\}, ||Q - P|| < \delta \Rightarrow |f(Q) - \alpha| < \epsilon$$

例　以下の平面 $\mathbf{R}^2$ 上の関数の極限を調べる

$$(1) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$x = 0$, $y = 0$, $x = y$ という 3 つの直線上に $(0,0)$ に近付いたときに異なる極値が得られるので，任意の点列による極限はない．

$$(2) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - y^3 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

(x, y) を $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に置き換えると，θ とは関係なく以下の極限が計算できる

$$\lim_{r\to 0} \frac{2r^3 \sin^3\theta - r^3\cos^3\theta + r^2}{r^2} = 1$$

関数の連続性

関数 f がある点 P で極限を持ち，その極限の値が $f(P)$ に等しいときに f が P で**連続**だという．すなわち

$$\lim_{Q\to P} f(Q) = f(P)$$

開領域 D で定義される関数 f が D の任意の点 P で連続ならば，f が D で連続だという．

定理 1 関数 f と g が点 P(または開領域 D) で連続ならば，cf $(c \in \mathbf{R})$, $f + g$, $f - g$, fg, f/g (ただし $g(P) \neq 0$ のとき) が P (または D) で連続である．

例　以下の関数が平面 $\mathbf{R}^2$ 上の関数が連続かどうかを調べる．

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 3x^2y^2}{2x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

まず，$(0,0)$ 以外では前述の定理より連続性が分かる．

$(0,0)$ では，また極座標に変換する．

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta - 3r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2(1+\cos^2\theta)} = \lim_{r\to 0} r^2 \frac{\cos^4\theta - 3\cos^2\theta\sin^2\theta}{1 + \cos^2\theta} = 0$$

よって f は全平面で連続である．

定理 2 (中間値) f が開領域 D で定義された連続関数で D の点 P, Q について $f(P) < f(Q)$ とする．$f(P) < \gamma < f(Q)$ をみたす任意の γ に対して，ある $R \in D$ が存在し，$f(R) = \gamma$. すなわち

$$\forall \gamma, f(P) < \gamma < f(Q) \Rightarrow \exists R \in D, f(R) = \gamma$$

定理 3 (最大値・最小値) 有界閉集合 K で連続な関数 f は最大値および最小値を持つ．すなわち

$$\exists P_0, Q_0 \in K, \forall P \in K,\ f(P_0) \leq f(P) \leq f(Q_0)$$

レポート課題　10 月 20 日提出

教科書の練習問題 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3