

# Objective Caml プログラミングの基礎

## 1 Objective Caml とは

Objective Caml は ML 系の関数型言語である。関数型言語には二つの意味がある。第一の意味は関数が値のように扱える言語、第二の意味は計算が数学的な関数のように行われ、結果が引数にしかよらない言語である。ML の場合には、第一の意味が当たっているが、第二の意味は部分的にしか当て嵌らない。次の講義で見る Haskell は第二の意味を追求している。

ML と Haskell に共通の特徴として、多相型付ラムダ計算に基いた強力な型システムが上げられる。実行時型エラーを完全に防ぐのと同時に、関数の再利用を可能にしている。

元の ML は 80 年代の初期に Edinburgh LCF という証明器のために開発された言語である。Caml はそういう ML を拡張して、オブジェクトシステムや省略可能引数を備えている。多くのライブラリも提供されている。

OCaml 関連リソース 日本語の本はないが、ウェブで使える資料が多くある。

[http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~garrigue/lecture/2006\\_AW/](http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~garrigue/lecture/2006_AW/)  
この講義に関する資料。

<http://caml.inria.fr/>  
Objective Caml の開発元。処理系がダウンロードできる。英語での情報も多い。

<http://ocaml.jp/>  
日本語での情報を集めたサイト。マニュアルの日本語版などがある。

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~garrigue/papers/jssst-ocaml.html>  
PPL サマースクールの資料。中級者向け。

[http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~garrigue/lecture/2006\\_AW/](http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~garrigue/lecture/2006_AW/)  
昨年の講義資料。色々なアルゴリズムを扱う。

連絡 質問と課題の答を [garrigue@math.nagoya-u.ac.jp](mailto:garrigue@math.nagoya-u.ac.jp) に送って下さい。

## 2 インタープリタの使い方

### 2.1 起動と終了

インタープリタを直接に使うには、Terminal など仮想端末を開けばいい。その中で `ocaml` を起動する。

```
$ ocaml
    Objective Caml version 3.09.2

#
```

この種類のインタプリタをトップレベルと言うが、対話的に定義や評価する式が入力できる。たとえば `1+2;;<ret>` を入力する。

```
# 1+2;;
- : int = 3
```

`;;` は OCaml に入力が終わったことを知らせる。それがないと、`<ret>` が無視され、改行しても入力が続く。

`- : int = 3` が OCaml の出力した答である。`-` は、OCaml が入力された式の値を計算し、それをそのまま答えたことを表す。`int` は入力された式が整数型だったことを表す。`3` は実行の結果である。

```
# let x = 1 ;;                                     (* let は定義 *)
val x : int = 1
```

出力が `val` で始まるとき、定義された名前とその型・値が表示される。入力の中で `(*` と `*)` で囲まれた部分は註釈で、無視される。

トップレベルから抜けるために `#quit` を使う。

```
# #quit;;                                         (* コマンドが#で始まる *)
$
```

## 2.2 Emacs での使い方

プログラムの編集や実行には Emacs が便利である。使い方について別紙を参照。

## 2.3 OCamlBrowser の使い方

もう一つの便利なツールとしては `ocamlbrowser` がある。シェルで

```
$ ocamlbrowser &
```

と入力すると新しいウィンドウが開く。メニューで `File - Shell` を選ぶとインタプリタが使える。

## 3 定義と型

### 値と関数の定義

```
# let x = "hello" ;;                               (* let は定義 *)
val x : string = "hello"
# let x = 1 ;;                                     (* 新しい定義 *)
val x : int = 1
# x = 2 ;;
- : bool = false                                  (* '=' だけだと等号になる *)
# let x = 3 in x+2;;                               (* 局所的な定義 *)
- : int = 5
# x;;
- : int = 1                                       (* 元の定義に影響がない *)
# let x = 3 and y = x+2 ;;                         (* 同時定義 *)
val x : int = 3
val y : int = 3                                  (* 定義の前の x が使われる *)
# let f (z : int) =                               (* 関数の定義 *)
  y + z ;;
```

```

val f : int -> int = <fun> (* ‘->’ は関数の型を表す *)
# f 0;;
- : int = 3
# let y = 12 ;;
val y : int = 12
# f 0;;
- : int = 3 (* 値を再定義しても影響はない *)
# let f z = y+z ;; (* 型を書かなくても大丈夫 *)
val f : int -> int = <fun>
# let f = fun z -> y+z ;; (* 関数のもう一つの書き方 *)
val f : int -> int = <fun>
# (fun z -> y+z) 0;; (* 定義がなくても使える *)
- : int = 3

```

## 多引数の関数

```

# let p (x : int) (y : int) = (* 引数を並べるだけ *)
    2 * x - y * y ;;
val p : int -> int -> int = <fun> (* ‘->’ が増える *)
# p 3 4;; (* 適用のときも並べるだけ *)
- : int = -10
# let p = fun x y -> 2 * x - y * y ;; (* 同じ定義 *)
val p : int -> int -> int = <fun>
# let p = fun x -> fun y -> 2 * x - y * y ;; (* これも同じ *)
val p : int -> int -> int = <fun>
# let q = p 3 ;; (* 最初の引数だけを渡す *)
val q : int -> int = <fun>
# q 4 ;; (* 残りの引数を渡す *)
- : int = -10

```

引数の一部を渡すことを「部分適用」と言う。

## 実数と演算子

```

# let pi = 3.1416 ;;
val pi : float = 3.1416
# let twopi = 2 * pi;;
This expression has type float but is here used with type int
# let twopi = 2 *. pi;; (* 実数の演算子は整数と違う! *)
This expression has type int but is here used with type float
# let twopi = 2. *. pi ;; (* 整数は実数ではない! *)
val twopi : float = 6.2832

```

上の例で分かるように、式を実行するために、型が完全に一致しないといけない。

```

val ( *. ) : float -> float -> float
val pi : float
val float : int -> float (* 整数を実数に変換 *)
val truncate : float -> int (* 実数を整数に変換 *)

```

例えば、pi の倍数を整数に戻す関数を以下のように定義できる。

```

# let npi (n : int) = truncate ((float n) *. pi);;
val npi : int -> int = <fun>
# npi 8;;
- : int = 25

```

必要な型に応じて関数を選ぶという方法は有効である。

## 様々な値

```
# true || false;;
- : bool = true
# 'A';;
- : char = 'A'
# "Hello" ^ " everybody";;
- : string = "Hello everybody"
# ();;
- : unit = ()
# (1, "one", 1.0);;
- : int * string * float = (1, "one", 1.)
# [| "little"; "brown"; "fox" |];;
- : string array = [|"little"; "brown"; "fox"|]
# Array.init 5 (fun i -> i*i);;
- : int array = [|0; 1; 4; 9; 16|]
# [1; 2; 3; 4];;
- : int list = [1; 2; 3; 4]
```

## 型の種類 よく使われる型のまとめ

int	整数	$-2 \cdot 10^{30} \sim 2 \cdot 10^{30} - 1$ (64 ビットだと $10^{62}$ )
bool	真偽値	true または false
char	文字	8 ビット文字
string	文字列	8 ビット文字の列
unit	単位型	() だけ . C 言語の void に似ている
float	実数	C 言語の double と同じ
$t \rightarrow u$	関数型	$t$ 型から $u$ 型への関数
$t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_n \rightarrow u$	多引数関数型	$t_1, \dots, t_n$ 型から $u$ 型への関数
$t_1 * \dots * t_n$	組型	$t_1, \dots, t_n$ の値の組
$t$ array	配列	$t$ 型の値を要素とする配列
$t$ list	リスト	$t$ 型の値を要素とするリスト
$t$ ref	変数 (参照型)	$t$ 型の値への参照 (変更可能)
'a, 'b, ...	型変数	関数適用時に具体的な型が選べる

型を書くとき \* が  $\rightarrow$  より結合力が強いが、型パラメーター ( $t$  array など) より弱い。

## 変換関数

```
Char.code      : char -> int
Char.chr       : int -> char
string_of_int  : int -> string
int_of_string  : string -> int
float          : int -> float
truncate      : float -> int
string_of_float : float -> string
float_of_string : string -> float
Array.of_list  : 'a list -> 'a array
Array.to_list  : 'a array -> 'a list
```

Char.code という書き方は Char というモジュールの中の関数 code を指している．異なるモジュールでは同じ名前の関数があってもいい．

### 構成・読み出し関数

```
String.get      : string -> int -> char          (* s.[i] とも書く *)
String.length  : string -> int                  (* 文字列の長さ *)
String.make    : int -> char -> string          (* 同じ文字を n 回繰り返した文字列 *)
Array.get      : 'a array -> int -> 'a         (* a.(i) とも書く *)
Array.length   : 'a array -> int               (* 配列の長さ *)
Array.init     : int -> (int -> 'a) -> 'a array (* 0...n-1 に対して関数が呼ばれる *)
```

### 数値演算子

```
+ - * / mod    : int -> int -> int
+. -. *. /. ** : float -> float -> float
-              : int -> int
-.            : float -> float
```

数値演算子は整数用と実数用が別々に定義されている．ただし，引数の型が実数だと入力時にわかれば，整数用のものは自動的に実数用に変換される．

### 比較演算子

```
= <> < > <= >= : 'a -> 'a -> bool
== !=           : 'a -> 'a -> bool
```

型の 'a はどの値でも使えるということを意味する．同じ型どうしの値ならどの値でも比較できる．2行目は値のメモリ上の物理的な位置を比較する．

### 真偽演算子

```
&& ||          : bool -> bool -> bool
```

式1 && 式2は両方の式が真のときのみ真を返し，式1 || 式2は両方の式の少なくとも一方が真のときのみ真を返す．ただし，実際には次のように実行される．式1 && 式2は式1の結果が偽だったら式2を実行しない．式1 || 式2は式1の結果が真だったら式2を実行しない．

### 結合演算子

```
^          : string -> string -> string
Array.append : 'a array -> 'a array -> 'a array (* 演算子ではない *)
@          : 'a list -> 'a list -> 'a list
```

“^” は文字列にも使える．たとえば，“hello” ^ “ world”は “hello world” になる．

練習問題 3.1 1. この章の例を *ocaml* のトップレベルに入力して，慣れて見る．

2. 二つの実数の平均を取る関数を定義せよ．

```
val heikin : float -> float -> float
```

3. 配列をベクトルと見做して、スカラー積と内積を計算する関数を定義せよ。

```
val scalar : float -> float array -> float array
val plus   : float array -> float array -> float array
```

そこで使う関数は `+` (実数の足算), `Array.length`, `Array.init` と `Array.get` である。

## 4 多相型と汎関数

### 型推論

ML では型が自動的に推論されるので、関数を定義するときでも型を書かなくてもいい。

```
# let f x y = (x+1, y.[0]);;
val f : int -> string -> int * char = <fun>
```

`x` は `+` で使われたために `int` 型になる。`y` は `String.get` で使われたために `string` 型になる。

### 多相型

前記のような制約が現れないとき、型変数が使われる。

```
# let fst (x,y) = x ;;
val fst : 'a * 'b -> 'a = <fun>
```

ここでは `x` と `y` の型を特定するものがないので、それぞれ型変数 `'a` と `'b` が付けられる。結果が `x` なので、結果の型が `'a` になる。型変数を含む型を多相型と言う。厳密には、決まらない型の多相型への変換は `let` による定義の度に行なわれる。

多相型を持った関数を使うとき、型変数に対する型が自由に決められる。しかも、それが何回も、異なる型でもできる。

```
# fst ("France", 33) ;;
- : string = "France"
# fst (5.0, 2.3) ;;
- : float = 5.
```

一つ目の例では `fst` の型が `string * int -> string` になる。二つ目の例では `float * float -> float` になる。

今まで見た関数の型の中に、二種類の多相型が見られる `Array.of_list`, `Array.get`, `Array.init` などは引数と結果の両方に同じ型変数 `'a` がある。こういう場合では結果の型が引数の型により決まると思えばいい。しかし `Array.length` では型変数が引数の型にしか現れない。そういう場合、配列の中身が結果に現れないことになる。

第一種の場合でも、関数に多相型が付けられると、関数が使われるときに動きが型変数に対する実際の型に依存しない。型の一部が変数であるということは、それに対する値の一部が関数の中で処理されていないことを保証する。

### 参照型

第3章では、同じ名前に対する新しい定義を追加しても、前の定義が隠れるだけで、その定義を参照していた他の定義に影響がないことを見た。ML の定義は C のような変数ではなく、定数である。

ただ、プログラムを書くときに、変更可能な変数が欲しい場合もある。ML では参照型として提供される。厳密にいうと、参照型は新しい種類の定義ではなく、データ構造である。

```

# let x = ref 1 ;;                                (* 変数の定義 *)
val x : int ref = {contents = 1}
# !x ;;                                           (* 変数の読み出し *)
- : int = 1
# x := 2 ;;                                       (* 変数の書き込み *)
- : unit = ()
# !x ;;
- : int = 2

```

参照型以外に、実は文字列と配列も変更可能である。文字列の場合、それを使わない方がいいが、配列の場合は様々なアルゴリズムで役に立つ。

```

# let arr = [| 2; 3; 4 |];;
val arr : int array = [|2; 3; 4|]
# arr.(0) <- 5;;                                  (* 配列への書き込み *)
- : unit = ()
# arr;;
- : int array = [|5; 3; 4|]

```

参照型は for ループを使うときに役に立つ。

```

# let sum (arr : int array) =
  let r = ref 0 in                                (* 変数を作る *)
  for i = 0 to Array.length arr - 1 do
    r := !r + arr.(i)
  done;                                           (* ‘;’ は逐次的に実行する式を並べる *)
  !r;;                                           (* 変数の値を返す *)
val sum : int array -> int = <fun>

```

可変な変数を使うと、プログラムの意味が各変数の状態に依存してしまうので、解釈が複雑になる。そのために、可変な変数を最低限に抑えるべきだ。

参照型や配列が可変であるために、多相型が少し制限されている。

```

# let r = ref [];;
val r : 'a list ref = {contents = []}
# r := [3];;
- : unit = ()
# r;;
- : int list ref = contents = [3]
# let single () x = [x];;
val single : unit -> 'a -> 'a list = <fun>
# let safe = single ();;
val safe : 'a -> 'a list = <fun>

```

上記の下線で始まる型変数は通常の型変数と違い、多相型ではない。始めて使われたときに型が決まる。一旦 r に整数のリストを入れると、r の型自体が int list ref に変わってしまう。

しかし、この現象は ref を使ったときだけではない。例えば、Array.init を部分適用したときでも同じことが起きる。OCaml では、関数文の中にない関数適用を含む定義に関しては、結果の型変数は多相型にしない。厳密には、関数型の引数の方または ref か array(可変な型) の引数として表われる型変数だけが多相型にされない。

```

# single () [];;
- : 'a list list = [[]]                          (* 制限の対象にならない *)

```

## 汎関数

汎関数とは、関数を引数とする関数である。今まで見たものの中に `Array.init` は汎関数である。汎関数は普通の関数と全く同様に定義できる。ここに `sum` のもう一つの定義を与える。

```
# let iter (f : 'a -> unit) (arr : 'a array) =
  for i = 0 to Array.length arr - 1 do
    f arr.(i)
  done;;
val iter : ('a -> unit) -> 'a array -> unit = <fun>
# let sum2 arr =
  let r = ref 0 in
  iter (fun x -> r := !r + x) arr;
  !r ;;
val sum2 : int array -> int = <fun>
```

`iter` はある配列の各要素に対して引数の関数を適用する。手で `for` ループを書くより、配列の長さを気にする必要がないという利点がある。`iter` を利用して `sum` を書きなおすと、プログラムが短くなる。

`iter` は一般的な汎関数で、`Array.iter` という名前で最初から定義されている。しかし、自分の好みに合わせて汎関数を定義するのもいい。汎関数が大好きなら、以下のコードも書ける。

```
# let local x0 (f : 'a ref -> unit) =
  let r = ref x0 in f r; !r;;
val local : 'a -> ('a ref -> unit) -> 'a = <fun>
# let sum3 (arr : int array) =
  local 0 (fun r -> iter (fun x -> r := !r + x) arr);;
val sum3 : int array -> int = <fun>
```

一見読みにくいですが、各汎関数の働きを正しく理解していれば、実は元の `sum` の定義より分かりやすく、間違いの機会が少ない。

ベクトルのスカラー積も、以下の汎関数 `map` を使えば簡単に定義できる。

```
# let map f arr = Array.init (Array.length arr) (fun i -> f arr.(i)) ;;
val map : ('a -> 'b) -> 'a array -> 'b array = <fun>
# let scalar x v = map (fun x' -> x *. x') v ;;
val scalar : float -> float array -> float array = <fun>
```

ここでも、配列の長さや個別の要素の読み出しを気にしなくていいのがメリットである。

汎関数の働きをより分かりやすくするために、プログラムの等価性を考えるといい。以下の2つの展開規則を使う。

$$\text{let } f x_1 \dots x_n = E$$

の元で、次の展開ができる

$$f E_1 \dots E_n \implies \text{let } x_1 = E_1 \text{ and } \dots \text{ and } x_n = E_n \text{ in } E \quad (1)$$

$x$  の定義である  $v$  が値か名前 ((1) と (2) が使えない式) なら、そして  $x$  および  $v$  (名前なら) が  $E$  の中で再定義されていない場合、それを  $E$  の中に代入することもできる ( $E$  中の  $x$  を全て  $v$  に変える)

$$\text{let } x = v \text{ in } E \implies E\{x := v\} \quad (2)$$

では、展開してみよう。

```
sum3 arr =
local 0 (fun r -> iter (fun x -> r := !r + x) arr)
```



```

      ↓(1)
let x0 = 0 and f r = iter (fun x -> r := !r + x) arr in
let r = ref x0 in f r; !r
      ↓(2)
sum2 arr =
let r = ref 0 in
(let r = r in iter (fun x -> r := !r + x) arr);
!r
      ↓(1)
let r = ref 0 in
let f x = r := !r + x and arr = arr in
for i = 0 to Array.length arr - 1 do f arr.(i) done; !r
      ↓(2)
let r = ref 0 in
for i = 0 to Array.length arr - 1 do r := !r + arr.(i) done; !r
= sum arr

```

すなわち `sum3` , `sum2` と `sum` は等価なプログラムである .

### 関数の型を読む

コンパイラが推論した型が多くのことを教えてくれる . たとえば , `map` の型を見よう .

```
val map : ('a -> 'b) -> 'a array -> 'b array
```

- `map` は二つの引数を取る .
- その1つ目は関数である .
- `'b array` の要素は `'a array` からその関数を使って計算される . なぜかというとな , `'a array` 以外に `'a` 型の値はなく、他に `'b` 型の値を作る方法もない .

さらに , 推論された型を見ると定義の中のバグが発見できる .

```
val map_array : ('a -> 'a) -> 'a array -> 'a array
```

多相性不足 . 多分 , 入力の要素をそのまま出力に使っている .

```
val map_array : ('a -> 'b) -> 'a array -> 'c array
```

多相性過剰 . `'c` 型の値が作れないので , 結果がからっぽ .

練習問題 4.1 1. 逆順の配列を返す関数を定義せよ .

```
val rev_array : 'a array -> 'a array
```

2.  $f, \epsilon, x$  が与えられたとき , 以下の  $f'(x)$  を計算する関数 `derive` を定義せよ .

$$f'(x) = \frac{f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)}{2\epsilon}$$

```
val derive : (float -> float) -> float -> float -> float
```

3. 行列を作る関数を定義せよ . `Array.init` を二重に使えばいい .

```
val init_matrix : int -> int -> (int -> int -> 'a) -> 'a array array
# init_matrix 2 3 (fun i j -> 3*i+j);;
- : int array array = [[|0; 1; 2|]; [|3; 4; 5|]]
```

4. 台形式によって関数  $f$  の積分を計算する関数 `integ` を定義せよ . 式は

$$\text{Int}(f, N, x, x') = \frac{x' - x}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \quad \text{where } x_k = \frac{(N - k)x + kx'}{N}$$

```
val integ : (float -> float) -> int -> float -> float -> float
```

## 5 応用 関数グラフの描画

準備

[http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~garrigue/lecture/2006\\_AW/](http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~garrigue/lecture/2006_AW/) からライブラリーのソースをダウンロードする . 二つのファイルを使う .

- `plot.mli` はライブラリーのインターフェースであり , 使える関数の型を与えている . 日本語に翻訳すると以下が内容である .

```
(* plot.mli *)
val adjust_size : (float * float) list -> unit
  (* リストに含まれる点が全て表示できるように縮尺を合わせる *)
val create_curve : (float -> float) -> (float * float) list
  (* 渡された関数の現在表示可能な範囲でのグラフを作る *)
val draw_curve : (float * float) list -> unit
  (* グラフを描画する *)
```

- `plot.ml` はライブラリーの実装である . `Graphics` という OCaml に添付されているグラフィックスライブラリーを使って `plot.mli` の関数を実装している . 使い方はインターフェースで決まっている , このファイルの中身を見る必要はない .

アプリケーションに入っている X11 も起動しなければならない .

ファイルのコンパイル

まずは , `plot.mli` と `plot.ml` をそれぞれコンパイルしなければならない . 順番は重要である .

```
$ ocamlc -c plot.mli          (* plot.mli -> plot.cmi *)
$ ocamlc -c plot.ml          (* plot.ml -> plot.cmo *)
```

ライブラリーの利用

```
#load "graphics.cma" ;;          (* OCaml のグラフィックスライブラリー *)
#load "plot.cmo" ;;            (* plot.cmo をロード *)
open Plot ;;                   (* plot.cmi をロード *)
adjust_size [-5., 0.; 5., 0.] ;;
let curve = create_curve (fun x -> (sin x) ** 2. -. 0.5) ;;
adjust_size curve ;;
draw_curve curve ;;
```

このプログラムの実行結果は図 1 に示してある .

練習問題 5.1 1. 様々な関数のグラフを描画して見よ .

2. 関数のリストと  $x$  軸の範囲を与えらるとそれぞれの関数を同時に描いたグラフを表示する関数を定義せよ .

```
val draw_functions : (float -> float) list -> float -> float -> unit
```

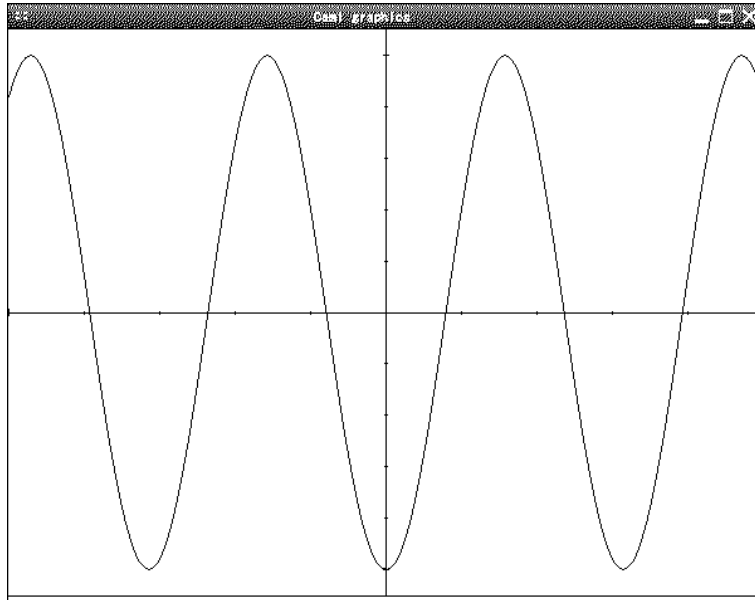


図 1: Plot を使った例

その関数を定義するのに、以下の二つの関数が役に立つ。

```
List.map      : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list      (* Array.map と同じ *)
List.iter    : ('a -> unit) -> 'a list -> unit        (* Array.iter と同じ *)
List.flatten : 'a list list -> 'a list
              (* 入れ子のリストを一つの長いリストに変換 *)
```

3. 実は `draw_curve` は点を直線でつなぐ関数である。 `draw_curve` を使って任意の正多角形を描画する関数を定義せよ。

## 6 再帰関数とリスト

### 再帰関数

自明でないプログラムを書くにはループが必要である。しかし、`for` ループを使うときには、可変な変数が必要になり、プログラムの(理論的な)解釈が複雑になる。再帰関数はもう一つのループの書き方を与えてくれる。

まず、最大公約数の計算を見る。

```
# let rec gcd m n =                                     (* let rec は再帰的な定義 *)
  if n = 0 then m else gcd n (m mod n) ;;
val gcd : int -> int -> int = <fun>
# gcd 15 70;;
- : int = 5
```

もしも同じプログラムを `while` ループで書いたら、大分長くなる。

```
# let gcd2 m n =
  let m = ref m and n = ref n in
  while !n <> 0 do                                     (* while ループ *)
    let n' = !m mod !n in                             (* 名前は n' でもいい! *)
    m := !n; n := n'                                 (* 同時代入ができない *)
  done;
  !m ;;
```

```
val gcd2 : int -> int -> int = <fun>
```

しかし、再帰の最大のメリットは短かさではなく、証明しやすさである。再帰関数は帰納法と同じ構造をしているので、帰納法により証明が簡単にできる。gcd の場合では ( $m, n \geq 0$  と仮定して)

- $n = 0$  ならば、0 はどんな自然数でも割れるが、 $m$  を割る最大の自然数は  $m$  自身である。ゆえに  $m$  と  $n$  の最大公約数は 0 である。
- $n > 0$  ならば、任意の  $k < n$  と任意の  $m$  に対して、 $\text{gcd } m \ k$  が  $m$  と  $k$  の最大公約数であると仮定する。  
 $m$  と  $n$  の最大公約数は  $m \bmod n$  を割らなければならない。逆に、 $q$  が  $n$  と  $m \bmod n$  を割っていれば、 $m$  も  $q$  で割れる。ゆえに  $m$  と  $n$  の最大公約数は  $n$  と  $m \bmod n$  の最大公約数でもある。 $0 \leq m \bmod n < n$  がなりたつので、帰納法の仮定が適用できて、 $(m$  と  $n$  の最大公約数) = ( $n$  と  $m \bmod n$  の最大公約数) =  $\text{gcd } n (m \bmod n) = \text{gcd } m \ n$ 。

再帰では、単純なループで表現できない計算の構造も表現できる。

```
# let rec fib n = if n < 2 then 1 else fib (n-1) + fib (n-2) ;;
val fib : int -> int = <fun>
# fib 5;;
- : int = 8
```

しかし、こういうものは必ずしも効率よくない。

```
# #trace fib;;                                     (* 呼び出しを表示させる *)
fib is now traced.
# fib 4;;
fib <-- 4
fib <-- 2
fib <-- 0
fib --> 1
fib <-- 1                                       (* fib 1 が呼ばれる *)
fib --> 1
fib --> 2
fib <-- 3
fib <-- 1                                       (* ここも *)
fib --> 1
fib <-- 2
fib <-- 0
fib --> 1
fib <-- 1                                       (* ここも *)
fib --> 1
fib --> 2
fib --> 3
fib --> 5
- : int = 5
```

練習問題 6.1 fib のもっと賢い書き方があるはず。補助定義を使ってもいい。

リスト

```
# [1; 2; 3];;                                     (* リストは配列のように書く *)
- : int list = [1; 2; 3]
# 1 :: [2; 3];;                                   (* cons(コンス) という構成子で作られる *)
```

```

- : int list = [1; 2; 3]
# 1 :: (2 :: (3 :: []));;          (* これが本当の内部構造 *)
- : int list = [1; 2; 3]
# List.hd [1;2;3];;              (* リストの頭 *)
- : int = 1
# List.tl [1;2;3];;              (* リストの尻尾 *)
- : int list = [2; 3]

```

リストは配列のようなデータ構造だが、簡単に頭に値を追加・削除できるので重宝される。  
リストに対して多くの関数が定義されている。

```

List.length      : 'a list -> int
List.hd          : 'a list -> 'a
List.tl         : 'a list -> 'a list
List.nth        : 'a list -> int -> 'a
List.rev        : 'a list -> 'a list
List.append     : 'a list -> 'a list -> 'a list      (* l1 @ l2 とも書く *)
List.flatten    : 'a list list -> 'a list
List.iter       : ('a -> unit) -> 'a list -> unit
List.map        : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
List.fold_left  : ('a -> 'b -> 'a) -> 'a -> 'b list -> 'a
List.fold_right : ('a -> 'b -> 'b) -> 'a list -> 'b -> 'b
List.for_all    : ('a -> bool) -> 'a list -> bool
List.exists     : ('a -> bool) -> 'a list -> bool
List.mem        : 'a -> 'a list -> bool
List.filter     : ('a -> bool) -> 'a list -> 'a list
List.split      : ('a * 'b) list -> 'a list * 'b list
List.combine    : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b) list
List.assoc      : 'a -> ('a * 'b) list -> 'b
List.mem_assoc  : 'a -> ('a * 'b) list -> bool
List.remove_assoc : 'a -> ('a * 'b) list -> ('a * 'b) list
...

```

練習問題 6.2 型と名前から、各関数の働きを推理せよ。試しに値を渡してもいい。

### パターン・マッチング

```

let hd l =
  match l with
  []      -> failwith "List.hd"          (* エラーを起こす *)
  | a :: _ -> a ;;                       (* 頭部を返す *)
let tl l =
  match l with
  []      -> failwith "List.tl"
  | _ :: t -> t ;;                        (* 後部を返す *)

```

パターンマッチングは以下の構造の計算式である。

```

match 計算式 with
  パターン1 ->
    計算式1
  | ...
  | パターンn ->
    計算式n

```

パターンは構成子と名前だけでできた式である。パターンを順番に見て、マッチする値がパター

ン<sub>i</sub>と同じ形をしていれば、パターン<sub>i</sub>の中の名前をマッチする値の対応する部分に束縛して（‘\_’は束縛されない特別な名前）、計算式<sub>i</sub>の結果を返す。

リストと再帰 リストに対する関数のほとんどは再帰的に定義されている。

```
let rec length l =
  match l with
  | [] -> 0
  | _ :: l' -> 1 + length l'
;;
let rec rev_append l1 l2 =
  match l1 with
  | [] -> l2
  | a :: l -> rev_append l (a :: l2)
;;
let rev l = rev_append l [] ;;
```

練習問題 6.3 1. 二つのリストの連結を行う append を再帰関数として定義せよ。

2. rev はなぜ直接に再帰関数として定義されていないのか？

3. リストを多項式と見做し (頭が定数)、ある点で多項式の値を計算する関数を定義せよ。

```
val eval_poly : int list -> int -> int
# eval_poly [1; 0; 3] 2 ;;
- : int = 13 (* 1 + 0*2 + 3*4 *)
```

検索問題 再帰的な関数は検索アルゴリズムに向いている。例えば、有名な SEND + MORE = MONEY 問題は以下のように解ける。(S と M は 1~9 の数字, E, N, D, M, O, R, Y は 0~9 の数字に対応しており, SEND と MORE が対応している 10 進の数の足し算が MONEY になっている。)

(\* 文字と数字の対応が条件を満たしているか判定する関数 \*)

```
val check : (char * int) list -> bool = <fun>
```

(\* 解のリストを作る再帰関数 \*)

```
# let rec search dict letters numbers =
  match letters with
  | [] -> if check dict then [dict] else []
  | a :: letters -> (* letters <- List.tl letters *)
    let rec choose tried numbers =
      match numbers with
      | [] -> incr steps; []
      | n :: numbers -> (* numbers <- List.tl numbers *)
        let sols = search ((a,n)::dict) letters (tried @ numbers) in
        sols @ choose (n::tried) numbers
    in
    choose [] numbers ;;
val search :
(char * int) list -> char list -> int list -> (char * int) list list =
<fun>
# let rec interval m n =
  if m > n then [] else m :: interval (m+1) n ;;
val interval : int -> int -> int list = <fun>
```

```
# let solve () =
  search [] ['S';'E';'N';'D';'M';'O';'R';'Y'] (interval 0 9) ;;
val solve : unit -> (char * int) list list = <fun>
# solve () ;;
- : (char * int) list list = [[('Y',2); ...]]
```

練習問題 6.4 上記の check という関数を定義せよ。List.map, List.assoc と前問の eval\_poly を使うといい。

解を見付けるのに、check は何回呼ばれたか？ search を少し変えてその回数が減らせる。

## 7 再帰データ型

再帰データ型が型付関数型言語の最大の特徴であると言える。このデータ構造が他の言語では見当たらないのに、関数型言語の全てのプログラムに使われている程に便利なものである。リストは再帰データ構造の一例である。

### 型定義

再帰データ型の定義は以下のように行われる

```
type 型変数 型名 =
  構成子1 [of 引数型1]
  | ...
  | 構成子n [of 引数型n]
```

型変数は要らないときに省略する。

リストは最初から定義されるが、自分で定義しようと思えば、以下のようなになる。

```
# type 'a mylist =
  Nil                                     (* '[]' に当る *)
  | Cons of 'a * 'a mylist ;;           (* '::' に当る *)
type 'a mylist = Nil | Cons of 'a * 'a mylist
# let rec mylist_of_list l =
  match l with
  [] -> Nil
  | a :: t -> Cons (a, mylist_of_list t) ;;
val mylist_of_list : 'a list -> 'a mylist = <fun>
# mylist_of_list [1;2;3];;
- : int mylist = Cons (1, Cons (2, Cons (3, Nil)))
# let my_hd l =
  match l with
  Nil -> failwith "my_hd"
  | Cons(a,_) -> a ;;
val my_hd : 'a mylist -> 'a = <fun> (* 当然パターンマッチングが使える *)
```

再帰データ型が将来のコードの変更を安全にしてくれる。

```
type 'a mylist = Nil | Cons of 'a * 'a mylist | One of 'a
(* mylist の定義を変更 *)
(* 元の定義をそのまま *)
# let my_hd l =
  match l with
  Nil -> failwith "my_hd"
  | Cons(a,_) -> a ;;
Warning P: this pattern-matching is not exhaustive.
Here is an example of a value that is not matched:
```

```
One _
val my_hd : 'a mylist -> 'a = <fun>
```

間違ったプログラムがコンパイルできるものの、問題箇所を指摘したワーニングが出力される。(エラーにもできる)

## 抽象構文と評価

以下のような言語を扱う処理系を作りたい。

式 ::= 整数 | 変数 | 式 + 式 | 式 × 式 | (式)

式の例

$5 \times 2 + 3$        $(3 + y) \times 12$

抽象構文を表す型をまず定義する。

```
type expr =
  Num of int
  | Var of string
  | Plus of expr * expr
  | Mult of expr * expr
```

それに対して基本操作を定義する。

```
# let map_expr f e = (* 再帰的でない map *)
  match e with
  | Num _ | Var _ -> e
  | Plus (e1, e2) -> Plus (f e1, f e2)
  | Mult (e1, e2) -> Mult (f e1, f e2)
val map_expr : (expr -> expr) -> expr -> expr
# let rec subst env e = (* 変数の代入 *)
  match e with
  | Var x when List.mem_assoc x env -> Num (List.assoc x env)
  | e -> map_expr (subst env) e
val subst : (string * int) list -> expr -> expr
```

元の map\_expr は再帰的でないが、subst の中では再帰的に使われている。汎関数は役に立つ。可能な限り式を評価する関数を定義する。

```
# let rec eval e =
  match map_expr eval e with
  | Plus (Num x, Num y) -> Num (x + y)
  | Mult (Num x, Num y) -> Num (x * y)
  | e' -> e'
val eval : expr -> expr = <fun>
# let e = subst ["x", 3; "z", 2]
  (Plus (Var "y", Mult (Var "x", Var "z")));;
val e : expr = Plus (Var "y", Mult (Num 3, Num 2))
# let e' = eval e;;
val e' : expr = Plus (Var "y", Num 6)
```

練習問題 7.1 1. expr に関するコードを入力し、例に対して動かす。

2. 式の構文に ‘-式’ を追加し、それに合わせて定義を修正せよ。

3. expr を文字列に変える関数を定義せよ。括弧を多く使ってもいい。