2004 年 6 月 23 日

3　判定が不可能な問題

Turing 機械によって解けない問題がある。しかも、Turing's Thesis を認めれば、そういう問題はどんな具体的な手続きでも解けない。

定義 1 「具体的な手続き」とは、規則の集まりと、各ステップでその規則を適用するための機構である。

Turing's Thesis 任意の具体的な手続きは Turing 機械によって表現できる。

具体的な手続きの定義が一般的すぎるので、この仮説を証明することはできない。しかし、今まで考えられた全ての機構は Turing 機械に還元できる。以下では、(ほとんど) 全ての計算機科学者と同様に、Turing's Thesis に基いて考える。

3.1　停止問題

ある Turing 機械が停止するまでのステップ数は簡単に予測できない。永遠の止らない場合もありうる。永遠に結果を待ち続けるのは馬鹿げているので、最初から止るかどうか判定できれば便利であろう。

Turing 機械の停止問題とは、ある機械 M とテープ t を与えられたとき、M を t に適用した場合、実行が止まるかどうかを判定することである。

人間が判定するのは非常に難しいので、やはりコンピュータで実行できる、停止を判定する具体的な手続きが欲しい。Turing's Thesis を認めれば、これはすなわち、テープに $\overline{M}$ と t を渡されたとき、有限時間で必ず返事を返す Turing 機械 H を求めることになる。$\overline{M}$ の記述は万能 Turing 機械のときと同じものでいい。

残念ながら、そんな Turing 機械 H は存在しえない。

定理 1 任意の *Turing* 機械の停止問題を判定する具体的な手続きは存在しない。

証明　もしも、停止を判定する Turing 機械 H が存在すれば、それを次のように改造する。

まず、引数として $\overline{M}$ だけをもらい、M が $\overline{M}$ に適用されたとき止まるかどうかを判定する機械 H' を作る。$H'(\overline{M}) = H(\overline{M}, \overline{M})$

次に、H' が NO を返したときには止まるが、YES を返したときには無限ループに入る機械 H^* を作る。

最後に、$H^*(\overline{H^*})$ が止まるかどうかを判定する、すなわち $H(\overline{H^*}, \overline{H^*}) = H'(\overline{H^*})$ を実行する。もしも YES を返せば、$H^*(\overline{H^*})$ が止まらなくなるので、矛盾になる。NO を返せば、今度は $H^*(\overline{H^*})$ が止まってしまうので、それも矛盾。 □

3.2　印字問題

定理 2 任意の機械が実行中に特定の記号 S_0 をテープに書くことがあるかどうを判定する具体的な手続きは存在しない。

証明　S_0 をアルファベットに含まない機械 M を次のように変更する。各停止状態を変更し、停止する前に S_0 を書くようにする。

そうすると、新しい機械の印字問題は M の停止問題に当るので、判定が不可能になる。 □

3.3 空テープ停止問題および一様停止問題

定理 3 任意の機械が空テープに適用されたときに停止するかどうかを判定する具体的な手続きは存在しない。

定理 4 任意の機械がテープの中身に依存せずに停止するかどうかを判定する具体的な手続きは存在しない。

証明 A, C をアルファベットに含まない機械 M を次のように変更する。実行を始める前にテープに $\boxed{A \mid B \mid C}$ を書き込み (B は空記号)、左に移動しながら A を見たときそれを $\boxed{A \mid B}$ に書き換え、右に移動しながら C を見たときそれを $\boxed{B \mid C}$ に書き換える。

そうすると、新しい機械の一様停止問題は M の空テープ停止問題と一致する。 □

問 1 *1* 進数を *2* 進数に変換する *Turing* 機械を定義せよ。

問 2 空テープ停止問題の判定不能を証明せよ。一般の停止問題に還元すればいい。