2004 年 6 月 9 日

2　万能チューリング機械

定義 1 ある関数 $f(x)$ が *Turing* 計算可能というのは、ある *Turing* 機械 M_f が存在し、M_f のテープに決った形でコード化された x を書き、M_f を実行すると、実行が必ず終わり、しかも終ったときにテープに $f(x)$ のコードが書いてあることである。

その「決ったコード」についてはいろいろ考えられるが、まず自然数は 2 進数で表現すればよいでしょう。組などは括弧とコンマで表現すればよいでしょう。ただし、そういうコードは必然的に各マシンのアルファベットに依存します。文字の種類が足りなければ、コードを長くすることで同じ情報が表現できる。従って、そういうコードが決っていると仮定し、M のアルファベットでの x のをコードを $\overline{x}^T$ と書く。

Turing 計算可能性の定義によれば、前章で見た足し算を行う Turing 機械は、止まることを証明すれば、足し算が Turing 計算可能であることを示す。

定義 2 ある *Turing* 機械 U が万能というのは、任意の *Turing* 機械 M と任意の入力 x について、M の記述 $\overline{M}^U$ と $\overline{x}^U$ を並べたテープを U に与えると、もしも M を x に適用した結果が y であれば、U の結果が $\overline{y}^U$ になることである。

ここでは、二種類のものをコード化しなければならない。まず x と y は M のアルファベットで既にエンコードされていると仮定する。しかし、U のアルファベットが M のアルファベットより小さい可能性もあるので、ここで M の各文字を一定の長さの 2 進数でコード化する。例えば、M に 30 種類の文字があれば、U ではそれを 5 倍の長さにする。

実は、U に渡すときに 2 進数に変換するより、M をあらかじめ 2 進数で動作する機械に変えた方が簡単。

定理 1 任意の機械 M に対し、アルファベット $\Sigma_2 = \{0, 1, \mathrm{B}\}$ だけで動作し、M と同じ計算をする機械 M' が構築できる。さらに、M' のテープが一方向にしか伸びないようにもできる。

これで、アルファベットが Σ_2 で、テープが一方向にしか伸びない機械だけを考えればいい。

機械自体の記述はもっと難しい。ただし、紙で書けたので、テープにも書ける。初期状態、終了状態の集合、そして動作を規定する 5 組の集合をテープに書けばいい。

動作中にテープは以下のような形をしている。

			$q(t)$	$s(t)$	M の 5 組	
$\ldots$	P	$\ldots$			$\overline{M}^U$	
M の一方向テープ			M の状態	記号	M の記述	

U の動作は以下の通り

1. $(q(t), s(t))$ に合う規則を 5 組の中に探す。なければ終了
2. その 5 組に応じて $q(t+1)$ を書き込む
3. 方向を覚えながら、P を新しい文字に書き変える
4. 右か左に一個移動し、そこの文字を読み、P を書き込む
5. $s(t+1)$ を書き込み、1 から繰り返す

定理 2 万能 *Turing* 機械は構築できる