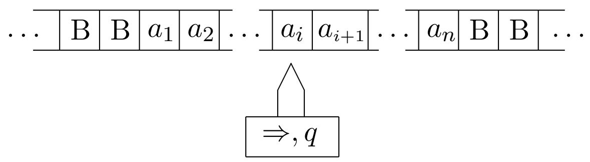
プログラミング言語と計算可能性

Jacques Garrigue, 2004 年 6 月 9 日

1　チューリング機械

チューリング機械とは、計算機の全ての機能を備える最も単純なモデルである。英国の数学者 A. M. Turing が 1936 年に計算過程の定式化のために定義した。**記号**が書かれている**テープ**、それを読む**ヘッド**と制御部の**状態**という三つ組からできている。テープの長さは無限だが、記号のアルファベットと制御部の状態数は有限である、さらにテープの上に書かれている記号の数も各時点では有限である。



直感的なチューリング機械の動作は三段階になっている。

1. ヘッドの下のテープの値 a_i を読む。
2. その値と制御部の状態 q に応じて、新しい値 a'_i を同じ場所に書き込み、新しい状態 q' に移る。
3. 同様に次の移動方向が決り、書き終わった後、左または右の位置 ($i-1$ または $i+1$) にヘッドを移す。

このとても単純な機械では、実はコンピュータができる全ての計算が実行できる。
チューリング機械の使う記号、取れる状態、とその状態遷移を正確に定義する。

定義 1 チューリング機械は次の 5 つ組 $M = (K, \Sigma, \delta, q_0, H)$ によって定義される。

K: 空でない有限集合。K の要素を**状態**という。

Σ: 空でない有限集合 (アルファベット)。Σ の元を**記号**という。Σ は**空白記号** B を含む。

q_0: K の要素で、**初期状態**という。

H: K の部分集合で、その要素を**停止状態**という。

δ: $(K \setminus H) \times \Sigma \to \Sigma \times \{\text{左}, \text{右}\} \times K$ なる関数で、**遷移関数**という。

それでは機械が定義されたが、動的な状態はまだ把握されていない。そのために**時点**の概念が導入される。

定義 2 あるチューリング機械 M の**時点**はテープ、位置、状態の 3 つ組で定義される。

$$t = (T, i, q)$$

T: $\mathbf{Z} \to K$ なる関数で、$T(n) \neq \mathrm{B}$ であるような n は高々有限個しかない。

i: $\mathbf{Z}$ の整数。

q: K の状態。

定義 3 チューリング機械 M が一動作で時点 t から t' に移ることを $t \vdash_M t'$ と書く。

$$\delta(q, T(i)) = (a, d, q') \Rightarrow (T, i, q) \vdash_M (T', i', q')$$

- $T'(i) = a$, $k \neq i$ ならば $T'(k) = T(k)$
- $d =$ 右 ならば $i' = i + 1$, $d =$ 左 ならば $i' = i - 1$

$\vdash_M$ の反射推移閉包を $\vdash_M^*$ と書く。さらに、q' は停止状態ならば、$(T, 0, q_0) \vdash_M^* (T', n, q')$ を $T \triangleright_M (T', n, q')$ と書き、M を T で実行した結果が (T', n, q') だという。

例題 1 括弧の対応をチェックする機械。

$\Sigma = \{\mathrm{B}, \mathrm{E}, \mathrm{L}, \mathrm{R}\}$
B は空記号、E は消した跡、L は左括弧、R は右括弧

$K = \{R, L, C, T, F\}$
R は右探索、L は左探索、C は最終チェック、T, F は真と偽

$q_0 = R$

$H = \{T, F\}$

$\delta =$

$q \backslash a$	B	E	L	R
R	$(a, \text{左}, C)$	$(a, \text{右}, R)$	$(a, \text{右}, R)$	$(\mathrm{E}, \text{左}, L)$
L	$(a, \text{右}, F)$	$(a, \text{左}, L)$	$(\mathrm{E}, \text{右}, R)$	$(a, \text{右}, F)$
C	$(a, \text{右}, T)$	$(a, \text{左}, C)$	$(a, \text{右}, F)$	$(a, \text{右}, F)$

例題 2 任意の自然数の加算 $a + b = c$

テープの初期状態 (それ以外は B). $a = \sum_0^k a_i \cdot 2^i, b = \sum_0^l b_i \cdot 2^j$

a_0	a_1	$\ldots$	a_k	M	I_0	b_0	$\ldots$	b_l

テープの最終状態 (それ以外は B). $c = \sum_0^m c_i \cdot 2^i$

M	c_0	c_1	$\ldots$	c_m

$\Sigma = \{\mathrm{B}, 0, 1, \mathrm{M}, \mathrm{I}_0, \mathrm{I}_1\}$

$K = \{L, R, A_0, A_1, A'_0, A'_1, A''_0, A''_2, W_0, W_1, F, T\}$

$q_0 = R$

$\delta =$

$q \backslash a$	B	0	1	M	I_0	I_1
L	$(a, \text{右}, R)$	$(a, \text{左}, L)$	$(a, \text{左}, L)$	$(a, \text{左}, L)$		
R		$(\mathrm{B}, \text{右}, A_0)$	$(\mathrm{B}, \text{右}, A_1)$	$(a, \text{右}, F)$		
A_i	$(i, \text{左}, L)$	$(a, \text{右}, A_i)$	$(a, \text{右}, A_i)$	$(a, \text{右}, A_i)$	$(a, \text{右}, A'_i)$	$(a, \text{右}, A''_i)$
A'_i	$(a, \text{左}, W_i)$	$(\mathrm{I}_0, \text{左}, W_i)$	$(\mathrm{I}_i, \text{左}, W_{1-i})$			
A''_i	$(\mathrm{I}_i, \text{左}, W_{1-i})$	$(\mathrm{I}_i, \text{左}, W_{1-i})$	$(\mathrm{I}_1, \text{左}, W_i)$			
W_i					$(i, \text{左}, L)$	$(i, \text{左}, L)$
F	$(a, \text{左}, T)$	$(a, \text{右}, F)$	$(a, \text{右}, F)$		$(a, \text{右}, A'_0)$	$(a, \text{右}, A''_0)$