MOULD 理論と KASHIWARA-VERGNE LIE 代数 II

古庄　英和

Abstract. 本稿は [K22] の続きである. 講演では Kashiwara-Vegne Lie 代数と Goncharov の二面 Lie 代数との関係について moulds 理論を用いた formulation について説明する. くわしくは [FK] を参照されたい.

1. 先行研究

Kashiwara-Vergne Lie 代数とは [AT, AET] において導入されたフィルター付き次数付き Lie 代数 $\mathfrak{krv}_\bullet$ である. Kashiwara-Vergne 予想の"formal 版"の解空間に作用することが知られている. $\mathfrak{krv}_\bullet$ の二重次数版 $\mathfrak{lkrv}_{\bullet\bullet}$ が [RS] で導入され mould 理論を用いた解釈がなされている. 定義により $\mathfrak{krv}_\bullet$ のフィルトレーションによる逐次商 $\mathrm{gr}_{\mathcal{D}}\mathfrak{krv}$ から $\mathfrak{lkrv}_{\bullet\bullet}$ 二重次数付き Lie 代数への埋め込み

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{D}}\mathfrak{krv}_\bullet \hookrightarrow \mathfrak{lkrv}_{\bullet\bullet}$$

が存在する

二面 Lie 代数とは [G] において導入された二重次数付き Lie 代数 $D(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ のことである. この Lie 代数は各有限アーベル群 Γ に対して定義されている. この Lie 代数は多重 L 値のダブルシャッフル関係式と分配関係式（正確にはそれらの"最高次の項"）より定義される.

$\Gamma = \{e\}$ のとき, $D(\{e\})_{\bullet\bullet}$ の depth>1-部分 $\mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}D(\{e\})_{\bullet\bullet}$ から $\mathfrak{lkrv}_{\bullet\bullet}$ への二重次数付き Lie 代数の埋め込み

$$\mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}D(\{e\})_{\bullet\bullet} \hookrightarrow \mathfrak{lkrv}_{\bullet\bullet}.$$

が存在することが [M, RS] の結果より従う. またこれら Lie 代数は motivic Lie 代数 $\mathrm{LieGal}^{\mathcal{M}}(\mathbb{Z})_1$ の二重次数版の研究と関わっており, この二つの Lie 代数は一致していることかどうかは基本的な問題である.

2. 主結果

[FK] では, 上の結果を mould 理論で整備しながら一般の有限アーベル群 Γ へ以下のように拡張している.

Date: July 31, 2022.
2022 年度 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」の予稿.
本研究は JSPS 科研費 (基盤 (B) 課題番号 JP18H01110) の助成を受けている.

(i) 各有限アーベル群 Γ に対して, フィルター付き次数付き $\mathbb{Q}$ 線型空間 $\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet$ を構成する:
- 特に $\Gamma = \{e\}$ のとき上述の $\mathfrak{krv}_\bullet$ と一致するように定義されている.
- この $\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet$ は, Ecalle の senary 関係式を満たし swap が pus-neutral である多項式値の有限 alternal moulds のなす次数付き $\mathbb{Q}$ 線型空間と同一視される.

$$\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet \simeq \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{sena/pusnu}} \cap \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{al}}^{\mathrm{fin,pol}}.$$

(ii) $\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet$ の定義式の"最高次"の項を取り出すことにより二重次数付き $\mathbb{Q}$ 線型空間 $\mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ を構成する:
- 特に $\Gamma = \{e\}$ のとき上述の $\mathfrak{lkrv}_{\bullet\bullet}$ と一致するように定義されている.
- この線型空間は二重次数付き Lie 代数の構造が入る.
- 以下の二重次数付き $\mathbb{Q}$ 線型空間の埋め込み

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{D}}\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet \hookrightarrow \mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$$

  が存在する. ここで左辺は $\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet$ のフィルトレーションによる逐次商である.
- この $\mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ は, push 不変で swap が pus-neutral である多項式値の有限 alternal moulds のなす次数付き $\mathbb{Q}$ 線型空間と同一視される.

$$\mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet} \simeq \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{push/pusnu}} \cap \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{al}}^{\mathrm{fin,pol}}.$$

これより以下の可換図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}_{\mathcal{D}}\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & \mathrm{gr}_{\mathcal{D}}(\mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{sena/pusnu}} \cap \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{al}}^{\mathrm{fin,pol}}) \arrow[d, hook] \\
\mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet} \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{push/pusnu}} \cap \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{al}}^{\mathrm{fin,pol}}
\end{tikzcd}$$

(iii) ダブルシャッフル関係式のみで定義される Lie 代数 $\mathbb{D}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ を導入する. 定義より Goncharov の二重次数付き二面 Lie 代数 $D(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ は $\mathbb{D}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ の部分 Lie 代数となる.
- 特に $\Gamma = \{e\}$ のとき $\mathbb{D}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ は上述の $D_{\bullet\bullet}$ と一致するように定義されている.
- $\mathbb{D}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ の depth>1-部分は, $\mathrm{ARI}(\Gamma)_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}}$ に属しており多項式値で有限な moulds がなす次数付き Lie 代数と同一視される.

$$\mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}\mathbb{D}(\Gamma)_{\bullet\bullet} \simeq \mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}\mathrm{ARI}(\Gamma)_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}}^{\mathrm{fin,pol}}.$$

(iv) 以下の次数付き Lie 代数の埋め込み

$$\mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}\mathrm{ARI}(\Gamma)_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}} \hookrightarrow \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{push/pusnu}}$$

を構成する．両辺を $\mathrm{ARI}(\Gamma)^{\mathrm{fin,pol}}_{\mathrm{al}}$ と共通部分を取ることにより二重次数付き Lie 代数の埋め込み

$$\mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}\mathbb{D}(\Gamma)_{\bullet\bullet} \hookrightarrow \mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet},$$

が得られる．

これより以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}\mathbb{D}(\Gamma)_{\bullet\bullet} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}\mathrm{ARI}(\Gamma)^{\mathrm{fin,pol}}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}} \arrow[d, hook] \\
\mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet} \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{push/pusnu}} \cap \mathrm{ARI}(\Gamma)^{\mathrm{fin,pol}}_{\mathrm{al}}
\end{tikzcd}$$

3. 課題

今回の共同研究 [FK] において浮上した関連する基本的な問題のいくつかを以下に列挙する．

(1) Racinet が [R] において多重 L 値のダブルシャッフル関係式を用いてフィルター付き次数付き Lie 代数 $\mathfrak{dmr}(\Gamma)_\bullet$ を導入している．Schneps は [Sch12] において「$\mathrm{ARI}(\{e\})_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}}}$ に対する Ecalle の senary 関係式の成立」を仮定したうえで埋め込みフィルター付き次数付き Lie 代数の埋め込み

$$\mathfrak{dmr}(\{e\})_\bullet \hookrightarrow \mathfrak{krv}_\bullet$$

を構成している．この仮定を外した上でもこの埋め込みが存するかどうかは定かでない．またこの埋め込みは一般の有限アーベル群 Γ へ拡張できるかどうかも不明である．さらに $\Gamma = \{e\}$ のときこの二つは同型であると期待されているが, 一般の有限アーベル群 Γ に対してもそのように期待すべきなのかどうかもよく判らない．また前節の主結果で挙げた二重次数付き Lie 代数の埋め込み $\mathrm{Fil}^2_{\mathcal{D}}\mathbb{D}(\Gamma)_{\bullet\bullet} \hookrightarrow \mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ についてはどうなのだろう．

(2) 定義より誘導される埋め込み

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{D}}\mathfrak{dmr}(\{e\})_\bullet \hookrightarrow D(\{e\})_{\bullet\bullet}$$

が二重次数付き Lie 代数の同型を与えているかという基本的な問題が考えられている．この問題を一般の有限アーベル群 Γ に対して定式化した問題も考えられ得る．また Kashiwara-Vergne 版での埋め込み

$$\mathrm{gr}_{\mathcal{D}}\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet \hookrightarrow \mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$$

が二重次数付き Lie 代数の同型を与えているかという同様の問題も考えられ得る.

(3) $\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet$ は $\Gamma = \{e\}$ のときは, [AT] の $\mathfrak{krv}_2^0$, 及び [RS, Definition 3] の $\mathfrak{krv}$ の depth>1-part と一致する. [AT] では他にも $\mathfrak{krv}_{n+1}^0$ $(n \geqslant 0)$ という Lie 代数が導入されており, また [AKKN] では krv_{n+1} という Lie 代数が導入されているが, これらと $\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet$ の関係も不明である.

(4) Γ が一般の有限アーベル群の時は, mould 理論側で $\mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{push/pusnu}}$ が ari_u-bracket で Lie 代数をなすことを示すことにより $\mathfrak{lkrv}(\Gamma)_{\bullet\bullet}$ が Lie 代数をなすことが [FK] で示されている. 一方で $\mathfrak{krv}(\Gamma)_\bullet$ が Lie 代数であることはまだ示されていない. mould 理論側で $\mathrm{ARI}(\Gamma)_{\mathrm{sena/pusnu}}$ が Lie 代数をなすことはまだ不明であるため証明ができていないのが要因であるが, mould 理論を介さずに純粋に代数的な証明を与えることも大事である.

(5) [E, §4.7] では以下の謎の可換図式が掲げられている.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as}}/\underline{\mathrm{as}}} \arrow[r, "\mathrm{adgari(pal)}"] \arrow[d, "\mathrm{logari}"] & \mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as}}/\underline{\mathrm{is}}} \arrow[d, "\mathrm{logari}"] \\
\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}} \arrow[r, "\mathrm{adari(pal)}"] & \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}}}.
\end{tikzcd}$$

この可換図式は Lie 代数 $\mathfrak{dmr}(\{e\})_\bullet$ や $D(\{e\})_{\bullet\bullet}$ の深い性質に関わる非常に魅力的な可換図式であるが, 正確な定義や証明の詳細等が明かされていないため数学的に厳密な解読が必要とされる (下辺の adari(pal) については [K21] で解説されている). この図式を一般の有限アーベル群 Γ に対して拡張を行ったり, Kashiwara-Vergne 版や Drinfeld [D] の Grothendieck-Teichumüller 版 (これの mould 理論的解釈は [FHK] を参照) での定式化を考えることも重要な研究課題である.

References

[AET] Alekseev, A., Enriquez, B. and Torossian, C., *Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **112** (2010), 143–189.

[AKKN] Alekseev, A., Kawazumi. N, Kuno. Y. and Naef, F. *The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem*, Advances in Mathematics, **326**, 1-53 (2018).

[AT] Alekseev, A. and Torossian, C., *The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 415–463.

[D] V. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.

[E] Ecalle, J., *The flexion structure and dimorphy: flexion units, singulators, generators, and the enumeration of multizeta irreducibles*, With computational assistance from S. Carr. CRM Series, **12**, Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation. Vol. II, 27–211, Ed. Norm., Pisa, 2011.

[FHK] Furusho, H., Hirose, M and Komiyama, N, *Associators and the Grothendieck-Teichmüller group in mould theory*, in preparation.

[FK] Furusho, H. and Komiyama, N, *Kashiwara-Vergne and dihedral bigraded Lie algebras in mould theory*, to appear in Ann. Fac. Sc. Toulouse.

[G] Goncharov, A. B., *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1^{(l)}(\mathbb{P}^1 - (\{0,\infty\} \cup \mu_N))$, Duke Math. J. **110** (2001), no. 3, 397–487.

[K21] Komiyama, N., On properties of adari(pal) and ganit(pic), preprint, `arXiv:2110.04834`.

[K22] 小見山 尚, Mould 理論と Kashiwara-Vergne Lie 代数 I, 本予稿集.

[M] Maassarani, M., *Bigraded Lie algebras related to MZVs*, preprint, `arXiv:1907.07200`.

[R] Racinet, G., *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **95** (2002), 185–231.

[RS] Raphael, E. and Schneps, L., *On linearised and elliptic versions of the Kashiwara-Vergne Lie algebra*, `arXiv:1706.08299v1`, preprint.

[Sch12] Schneps, L., *Double shuffle and Kashiwara-Vergne Lie algebras*, J. Algebra **367** (2012), 54–74.

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email address: `furusho@math.nagoya-u.ac.jp`